Pintér Ferenc

1. *Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:*

$$\left[\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1-x}-\left(x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-1}\right]^{-1}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\,\right).$$

Megoldás. Áttekinthetőbbé teszi a számolást, ha $\sqrt[3]{x}$-et új változóval jelöljük. A műveletek elvégzése után 1-et kapunk eredményül.

2. *Határozzuk meg az x és y számjegyeket úgy, hogy igaz legyen a következő egyenlőség:*

$$3\cdot\overline{xxxxx}=\overline{yxxxxx}-y.$$

Megoldás. Vezessük be az $a=\overline{xxxxx}$ jelölést. Ekkor a következőt kapjuk:

$$2\cdot a=\overline{y00000}-y,\quad \text{azaz}\quad 2\cdot a=99999y=9y\cdot 11111.$$

Másrészt $2a=2x\cdot 11111$, ezért $2x=9y$. Ebből következik, hogy $x=9$, $y=2$.

3. *Adott az $ABCD$ rombusz. Az ABD háromszög köré írt R sugarú kör áthalad a BCD háromszögbe írt kör középpontján. Fejezzük ki R segítségével a rombusz területét.*

Megoldás. Jelölje O a BCD háromszögbe írt kör középpontját, a pedig a rombusz oldalát. Ekkor a $BAO\sphericalangle=BDO\sphericalangle$, hiszen az OB húrhoz tartozó kerületi szögek. Ebből pedig következik, hogy a BCD háromszög és így az ABD háromszög is szabályos.

Így a rombusz területe: $T_{ABCD}=\dfrac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$, és ha figyelembe vesszük, hogy $a=2R\cdot\sin 60^\circ$, a területre $T_{ABCD}=\dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot R^2$ adódik.

4. *A k paraméter mely értéke esetén lesz a*

$$(k^2-5k+3)x^2+(3k-1)x+2=0$$

egyenlet egyik gyöke kétszerese a másiknak?

Megoldás. Az egyenlet akkor másodfokú, ha a főegyüttható, $k^2-5k+3\neq 0$ és akkor vannak valós gyökei, ha $D=(3k-1)^2-8(k^2-5k+3)\geq 0$.

A két feltétel teljesüléséről a kapott k ellenőrzésével is meggyőződhetünk, válasszuk most ezt az utat.

Ha x_1 és x_2 az egyenlet gyökei, akkor a feltétel pontosan akkor teljesül, ha a

$$P=(2x_1-x_2)(2x_2-x_1)$$

szorzat nulla. A műveletek elvégzése után $P=5x_1x_2-2\left(x_1^2+x_2^2\right)=9x_1x_2-2(x_1+x_2)^2$. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések felhasználásával

$$P=\frac{18}{k^2-5k+3}-\frac{2(3k-1)^2}{(k^2-5k+3)^2}=\frac{2}{(k^2-5k+3)^2}(-39k+26),$$

így $P=0$ pontosan akkor teljesül, ha $k=\dfrac{2}{3}$.

Ebben az esetben a főegyüttható nem 0 $\left(\dfrac{1}{9}\right)$, a diszkrimináns pozitív $\left(\dfrac{1}{9}\right)$, így két gyök létezik.

Megjegyzés: Ha $k=\dfrac{2}{3}$, akkor az egyenlet $\dfrac{1}{9}x^2+x+2=0$, a gyökei -6 és -3.

5. *Az ABC háromszögben a B csúcsnál lévő szög, $\beta=60^\circ$. Megrajzoljuk az A és C csúcsokból induló szögfelezőket, melyek egymást az O pontban, a szemközti oldalakat pedig a D és E pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy $OD=OE$.*

Megoldás. Mivel az $AOE\sphericalangle$ az ACO háromszög külső szöge, azért

$$AOE\sphericalangle=\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{(180^\circ-\beta)}{2}=60^\circ.$$

Ez azt jelenti, hogy a $BDOE$ négyszög húrnégyszög. Körülírt körének B pontjából a DO és az EO húrok egyenlő, 30°-os szögben látszanak (BO szögfelező), azért ez a két húr valóban egyenlő.

6. *Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:*

$$0{,}2^{\log_{0,7}\frac{2x+1}{2x-3}} < 1.$$

Megoldás. A logaritmus értelmezése miatt a tört csak pozitív értéket vehet fel, ez $x < -\frac{1}{2}$, vagy $x > \frac{3}{2}$ esetén teljesül. 1-nél kisebb pozitív alap hatványa akkor és csak akkor kisebb 1-nél, ha a kitevő, $\log_{0,7}\frac{2x+1}{2x-3}$ pozitív. A 0,7 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton fogyó, így ez pontosan akkor teljesül, ha $\frac{2x+1}{2x-3} < 0{,}7^0 = 1$. Ez az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x < \frac{3}{2}$, ezen a halmazon pedig az eredeti kifejezés akkor értelmes, ha $x < -\frac{1}{2}$, így ez a halmaz az egyenlőtlenség megoldása.

7. *Egy tetraéderben két szemközti él hossza x, a többi él hossza pedig egységnyi. Számoljuk ki a tetraéder térfogatát, mint az x függvényét! Milyen x érték esetén lesz a tetraéder térfogata a legnagyobb? Mennyi ez a legnagyobb térfogat?*

Megoldás. Legyen $ABCD$ az adott tetraéder, $CD = AB = x$, M és N az AB és CD élek felezőpontja.

Mivel AN és BN egy-egy egyenlő szárú háromszög súlyvonala és így magassága is, azért $AN \perp CD$ és $BN \perp CD$, a CD él merőleges az ABN síkra és így az abban fekvő NM egyenesre. Hasonló indokkal kapjuk, hogy $NM \perp AB$.

Az elmondottakból következik, hogy $V_{ABCD} = \frac{1}{3}T_{ABN}\cdot\overline{CD} = \frac{1}{6}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{MN}$, ahol T_{ABN} az ABN háromszög területét jelöli.

A Pitagorasz-tétel alkalmazásával

$$\overline{MN}^2 = \overline{BN}^2 - \overline{BM}^2 = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{2}$$

adódik. Így $V = \frac{1}{12}\cdot x^2\cdot\sqrt{4-2x^2}$, ahol $0 < x < \sqrt{2}$. A $V > 0$ térfogat legnagyobb értéke nyilván ugyanazon x értéknél van, mint a $12^2V^2(x) = x^4(4-2x^2)$ függvény legnagyobb értéke.

Utóbbi meghatározására használjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$x^4(4-2x^2) = x^2\cdot x^2\cdot(4-2x^2) \le \left(\frac{x^2+x^2+4-2x^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3,$$

egyenlőség akkor van, ha $x^2 = 4 - 2x^2$, ahonnan $x^2 = \frac{4}{3}$ adódik, ami lehetséges.

Így a térfogat $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ esetén lesz a legnagyobb, értéke pedig $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög AA_1 és BB_1 súlyvonalai akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a szokásos jelölésekkel:*

$$\operatorname{ctg}\gamma = 2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta).$$

Megoldás. A koszinusztétel, illetve a $2T = bc\sin\alpha$ összefüggés felhasználásával (T az ABC háromszög területe) $\cos\alpha = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}$ és $\sin\alpha = \frac{2T}{bc}$, ahonnan $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{-a^2+b^2+c^2}{4T}$. Így

$$2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) - \operatorname{ctg}\gamma = 2\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{4T} + \frac{-b^2+a^2+c^2}{4T}\right) - \frac{-c^2+a^2+b^2}{4T} =$$
$$= \frac{1}{4T}(5c^2 - a^2 - b^2).$$

Megmutatjuk, hogy ez az érték akkor és csak akkor nulla, ha az AA_1 és BB_1 súlyvonalak merőlegesek.

Ha S a háromszög súlypontja, akkor Thalész tétele szerint az ASB szög akkor és csak akkor derékszög, ha $AB = 2SC_1$, ahol CC_1 a C-ből induló súlyvonal, tehát $c = \frac{2}{3}s_c$, vagyis $c^2 - \frac{4}{9}s_c^2 = 0$.

A súlyvonal-tétel szerint $4s_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, tehát

$$c^2 - \frac{4}{9}s_c^2 = c^2 - \frac{2a^2+2b^2-c^2}{9} = \frac{2}{9}(5c^2 - a^2 - b^2).$$

Azt kaptuk, hogy mind az AA_1, BB_1 súlyvonalak merőlegessége, mind pedig a $2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = \operatorname{ctg}\gamma$ összefüggés az $a^2 + b^2 = 5c^2$ egyenlőséggel ekvivalens, amiből a bizonyítandó állítás következik.