

Az $AB = c$ szakasz felező merőlegesét metsszük az A körüli, $\frac{g}{3}$ sugarú körrel a G pontban, így $C_1G = b$; a G -n átmenő, AB -vel párhuzamos egyenesből a k körrel kimetsszük azt a H pontot, amelyre $HB < HA$, így $GH = \sqrt{r^2 - b^2}$; az AG egyenest metsszük a H -n átmenő, AB -re merőleges egyenessel J -ben, ekkor a párhuzamos szelők tétele alapján $GJ = x$. Ezután x -et felmérjük a C_1B szakaszra, a végpontjában AB -re állított merőleges k -ből kimetszi S -et. Innen már láttuk a befejezést.

II. megoldás. Kiszámítjuk az $SA = \frac{2}{3}s_a$ szakaszt (és vele tulajdonképpen $SB = \frac{2}{3}s_b$ -t is, mondhatjuk így is: a fenti ellipszisben az S pont vezérsugarait) a súlyvonalaknak a háromszög a, b, c oldalaival való ismert összefüggései¹ alapján. Látni fogjuk, hogy a nagyobbik vezérsugár egyenlő a fentiek szerint már rendelkezésünkre álló AG és GH szakaszok összegével (a kisebbik pedig ezek különbsége). Ekkor S -et a fenti k körből az A körüli SA sugarú körrel metszhetjük ki. s_a és s_b a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$u^2 - (s_a + s_b)u + s_a s_b = u^2 - gu + s_a s_b = 0.$$

$$2u_{12} = g \pm \sqrt{g^2 - 4s_a s_b}.$$

Ezekhez

$$s_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \quad s_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2), \quad s_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2);$$

tehát

$$2s_a s_b = (s_a + s_b)^2 - (s_a^2 + s_b^2) = g^2 - \frac{1}{4}(4c^2 + a^2 + b^2) = g^2 - c^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{4s_c^2 + c^2}{2},$$

$$g^2 - 4s_a s_b = -g^2 + \frac{9}{4}c^2 + s_c^2 = 9 \left\{ \left(\frac{s_c}{3}\right)^2 - \left[\left(\frac{g}{3}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] \right\},$$

így a két vezérsugár nagyobbika valóban

$$\frac{2}{3}s_a = \frac{g}{3} + \sqrt{\left(\frac{s_c}{3}\right)^2 - \left[\left(\frac{g}{3}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]} =$$

$$= AG + \sqrt{C_1H^2 - (AG^2 - AC_1^2)} = AG + \sqrt{C_1H^2 - C_1G^2} = AG + GH,$$

amint állítottuk.

¹Ha C tükörképe C_1 -re C^* , akkor a CAC^*B paralelogrammában az átlók négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével.