Rábai Imre

1. Az (a_n) sorozatban minden n pozitív egész számra $a_n = 2a_{n+1} - a_{n+2}$ és $a_2 + a_6 = 8$. Határozzuk meg a sorozat első 7 tagjának az összegét.

2. A 4 egység sugarú k_1 és k_2 körök a D pontban érintik egymást. A körök közös átmérőegyenese a k_1 kört a D és az A pontban metszi. A D pontra illeszkedő, AD-vel $60°$-os szöget bezáró egyik szelő a k_1 kört a C, a k_2 kört a B pontban metszi ($C \neq D$, $B \neq D$). Határozzuk meg az ABC háromszög területét.

3. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 2\sqrt{x+2y} &= 15, \\ \sqrt{2y-4x} - 1 &= \frac{2}{\sqrt{2y-4x}} \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert, amelyben x és y valós számokat jelölnek.

4. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 60°$. Az A csúcsponton átmenő szögfelező egyenes a BC oldalt olyan D pontban metszi, amelyre $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{1}{4}$. Számítsuk ki a háromszög másik két szögét.

5. Azon 200 cm kerületű húrtrapézok közül, amelyeknek két szöge $45°$-os, melyiknek maximális a területe? Mekkora ez a terület?

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} &a) \qquad \log_{|x-1|}(x+6) + \log_{\frac{1}{|x-1|}} x < 0; \\ &b) \qquad \log_{|x-1|}(x+6) + \log_{\frac{1}{|x-1|}} x \geq 0. \end{aligned}$$

7. Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle a, oldaléle b egység hosszú, ahol a és b pozitív egész számok. A hasáb felületét befestjük, majd a hasábot egységnyi élhosszúságú kockákra vágjuk. Az így kapott kockák között 112 db olyan van, amelyeknek pontosan egy oldallapja festett.

Határozzuk meg az eredeti hasáb felszínét és térfogatát!

8. A k valós paraméter mely értékei esetén lesz az

$$x^4 - (k+3)x^2 + 3k = 0$$

egyenlet négy különböző valós gyöke egy számtani sorozat négy egymást követő tagja?