1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az*

$$\log_{x-1}(x-2)\cdot\log_{x-2}(x-3)\cdot\log_{x-3}(x-1)=1$$

egyenletet.

Megoldás. Csak pozitív számoknak van logaritmusa, ezért $x-2>0$, $x-3>0$, $x-1>0$. A logaritmus alapja is pozitív és nem lehet 1, így $x-1\neq 1$, $x-2\neq 1$, $x-3\neq 1$. Összefoglalva: $x>3$ és $x\neq 4$.

Térjünk át $x-1$ alapú logaritmusra:

$$\log_{x-1}(x-2)\cdot\frac{\log_{x-1}(x-3)}{\log_{x-1}(x-2)}\cdot\frac{\log_{x-1}(x-1)}{\log_{x-1}(x-3)}=1.$$

Elvégezzük az egyszerűsítéseket: $\log_{x-1}(x-1)=1$. Az egyenlet értelmezési tartományán ez azonosság, így a megoldás: $x>3$ és $x\neq 4$.

2. *Egy téglatest különböző hosszúságú éleinek aránya* $1:2:3$. *Minden élét* 4 cm*-rel csökkentettük, így* 1056 cm^2*-rel csökkent a felszíne. Mennyivel csökkent a téglatest térfogata?*

Megoldás. Ha az eredeti téglatest élei a, $2a$ és $3a$, akkor felszíne:

$$A_1=2(2a^2+3a^2+6a^2)=22a^2.$$

A másik téglatest élei $a-4$, $2a-4$ és $3a-4$, így a felszíne:

$$A_2=2\big[(a-4)(2a-4)+(a-4)(3a-4)+(2a-4)(3a-4)\big]=22a^2-96a+96.$$

A két felszín különbsége: $A_1-A_2=96a-96=1056$, azaz $a=12$ cm. Az eredeti téglatest élei 12 cm, 24 cm, 36 cm, térfogata: $V_1=12\cdot 24\cdot 36=10\,368$ (cm^3), a másik téglatest élei 8 cm, 20 cm és 32 cm, ennek térfogata: $V_2=8\cdot 20\cdot 32=5120$ (cm^3).

A téglatest térfogata így 5248 cm^3-rel csökkent.

3. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:*

$$\frac{20}{x+y+2}-\frac{6}{3x+y-5}=1,\qquad \frac{12}{x+y}+\frac{21}{3x+y}=7.$$

Megoldás. A nevező nem lehet 0, így $x+y\neq -2$, $3x+y\neq 5$, $x+y\neq 0$, $3x+y\neq 0$.

Legyen $x+y=a$, $3x+y=b$, ekkor az egyenletrendszer a következő lesz:

$$\left.\begin{aligned}\frac{20}{a+2}-\frac{6}{b-5}&=1\\ \frac{12}{a}+\frac{21}{b}&=7\end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletet $(a+2)(b-5)$-tel, a másodikat ab-vel szorozva rendezés után kapjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned}-a+18b-102&=ab\\ 12b+21a&=7ab\end{aligned}\right\}.$$

Innen $a=\dfrac{57b-357}{14}$, és b-re a $19b^2-184b+357=0$ egyenletet kapjuk, amelynek egyetlen egész gyöke $b=7$, ahonnan $a=3$.

Mivel $x+y=3$ és $3x+y=7$, azért $x=2$, $y=1$. Ez a számpár minden feltételnek eleget tesz, így ez az eredeti egyenletrendszer megoldása.

4. *Mutassuk meg, hogy egy háromszög oldalaira akkor és csak akkor teljesül az* $a^2b-bc^2+c^3=a^2c+b^2c-b^3$ *összefüggés, ha a háromszög derékszögű, vagy pedig egyenlő szárú.*

Megoldás. Rendezzük az összefüggést 0-ra:

$$a^2b-a^2c+b^3-b^2c-bc^2+c^3=0.$$

A tagokat párosítva kiemeléseket végezhetünk:

$$\begin{aligned}a^2(b-c)+b^2(b-c)-c^2(b-c)&=0,\\ (b-c)(b^2+a^2-c^2)&=0.\end{aligned}$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor 0, ha $b-c=0$ vagy $a^2+b^2-c^2=0$, vagyis a háromszög vagy egyenlő szárú, vagy derékszögű.

5. *Az $x^2-6x+4=0$ egyenlet gyökei egy téglalap két oldalának hosszát adják centiméterben. Két nem egybevágó hengernek a tengelymetszete egybevágó ezzel a téglalappal. Határozzuk meg a két henger felszínösszegét és térfogatösszegét.*

Megoldás. A feladatot a gyökök kiszámítása nélkül oldjuk meg. A diszkrimináns pozitív, a két gyök szorzata ($x_1x_2=4$) és a két gyök összege ($x_1+x_2=6$) is pozitív, így két különböző pozitív valós gyöke van a másodfokú egyenletnek. Az egyik henger alapkörének átmérője x_1, a magassága x_2, a másik henger alapkörének átmérője x_2, a magassága x_1. Írjuk fel a felszínösszeget és a térfogatösszeget, az átalakítások után használjuk a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket:

$$\begin{aligned}A_1+A_2&=2\left(\frac{x_1}{2}\right)\pi\left(\frac{x_1}{2}+x_2\right)+2\left(\frac{x_2}{2}\right)\pi\left(\frac{x_2}{2}+x_1\right)=\pi\left(\frac{x_1^2}{2}+2x_1x_2+\frac{x_2^2}{2}\right)=\\&=\pi\frac{(x_1+x_2)^2+2x_1x_2}{2}=\pi\frac{6^2+2\cdot4}{2}=22\pi\approx 69{,}1\ (\mathrm{cm}^2).\\V_1+V_2&=\left(\frac{x_1}{2}\right)^2\pi x_2+\left(\frac{x_2}{2}\right)^2\pi x_1=\frac{\pi}{4}x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{\pi}{4}\cdot4\cdot6=6\pi\approx18{,}8\ (\mathrm{cm}^3).\end{aligned}$$

6. *Négy testvér egy konvex négyszög alakú telket örökölt. A telek szemközti oldalainak felezőpontjait összekötve négy négyszögre osztották az örökséget. Az első három testvér rendre 360, 720 és 900 m^2-es telket kapott. Mekkora telek jutott a negyediknek?*

A feladat nehezebbnek bizonyult, mint ahogy azt a szerkesztőség gondolta, ezért kitűzzük a pontversenyben (ld. 156. oldal).

7. *Igazoljuk, hogy ha $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ és $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, akkor*

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1.$$

Megoldás. Alakítsuk az egyenlet bal oldalán álló kifejezést:

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)=\\&=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\\&=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\\&=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1.\end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

8. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=40$ egyenletet.*

Megoldás. Az értelmezési tartomány: $x\neq-3$. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$x^2-\frac{6x^2}{x+3}+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=40-\frac{6x^2}{x+3},$$

$$\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2=40-\frac{6x^2}{x+3},\qquad\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+\frac{6x^2}{x+3}-40=0.$$

Ez $\frac{x^2}{x+3}$-ra másodfokú egyenlet, a két gyöke: 4 és -10. Az első esetben $x_1=6$, $x_2=-2$, a másodikban nem kapunk megoldást.