Jelöljük a beírt, körülírt kör középpontját O-val, K-val, BC felezőpontját A_1-gyel, O-nak BC-n levő vetületét A_2-vel, AO-nak BC-vel és a körülírt körrel alkotott metszéspontját A_3-mal, D-vel, D átellenes pontját E-vel. Ismeretes, hogy

$$BD = OD = CD,$$

hiszen például a BOD szög is és az OBD szög is egyenlő az ABC háromszög A-beli és B-beli szögei összegének a felével. Feltehetjük, hogy $AB < AC$, ekkor A_3 az A_1B, A_2 az A_3B szakaszon van. Pitagorasz tétele alapján

$$OD^2 = A_1A_2^2 + (OA_2 + A_1D)^2,$$

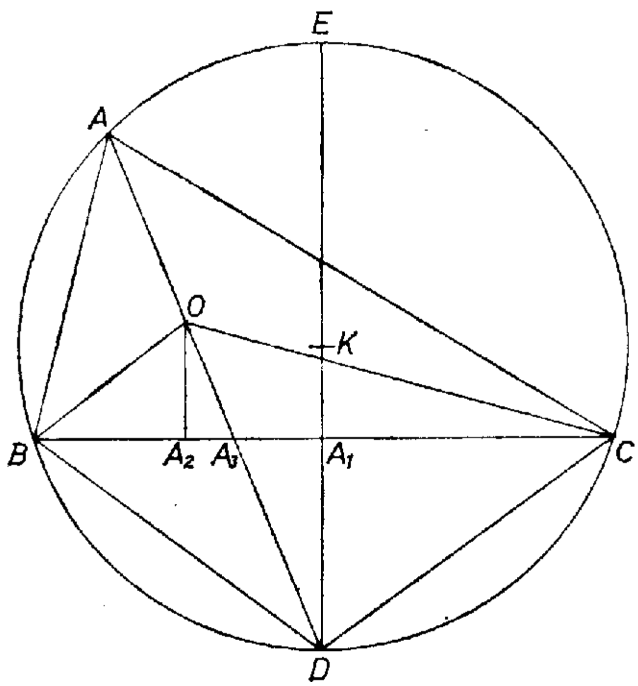
így $OD = BD$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$A_1A_2^2 = BD^2 - A_1D^2 - 2A_1D \cdot OA_2 - OA_2^2 = \frac{a^2}{4} - 2rd - r^2$$

ahol $d = A_1D$ a

(1) $$4d(2R - d) = a^2,$$

egyenlet megoldása, ami viszont a húrszeletekre vonatkozó $A_1D \cdot A_1E = A_1B \cdot A_1C$ összefüggésből következik.



Ismeretes, hogy $BA_2 = \frac{1}{2}(a-b+c)$, ahol b, c az AC, AB szakaszok hosszát jelöli, emiatt $A_1A_2 = \frac{1}{2}(b-c)$. Vezessük be az

(2) $$e^2 = a^2 - 4r(2d + r)$$

jelölést, ezzel a fenti eredményünk így írható:

(3) $$b - c = e.$$

Jelöljük még $2A_1A_3$-at x-szel, akkor $b : c = A_3C : A_3B$ miatt

$$b : c = (a + x) : (a - x)$$

vagyis

$$(b - c) : x = (b + c) : a.$$

Az aránypár első tagja az A_3A_2O, A_3A_1D háromszögek hasonlósága alapján meghatározható:

$$A_1A_3 : A_3A_2 = d : r,$$

tehát

$$x : (b - c) = d : (r + d).$$

Ezek szerint

$$b + c = \frac{a(r+d)}{d},$$

ahonnan (3) alapján kapjuk, hogy

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{ar}{d} + a + e\right), \quad c = \frac{1}{2}\left(\frac{ar}{d} + a - e\right) \tag{4}$$

A keresett háromszög oldalait tehát (4) határozza meg a $b > c$ feltétel mellett; ha ezt a feltételt elhagyjuk, b, c szerepe természetesen felcserélhető. A (4)-ben szereplő d az (1) egyenlet gyöke. Ebből e-t (2) alapján kapjuk, feltéve, hogy (2) jobb oldalán pozitív szám áll. A lehetséges megoldások száma tehát 0 és 4 között tetszőleges szám lehet.

A mondott numerikus esetben (1) a

$$d^2 - 130d + 39^2 = 0$$

egyenletet jelenti, ahonnan $d_1 = 13$, $d_2 = 117$. Ennek megfelelően (2) alapján

$$e_1^2 = 78^2 - 4 \cdot 28 \cdot 54 = 36,$$

és e_2^2-re negatív érték adódik. Végül (4)-ból kapjuk, hogy

$$b_1 = 126, \quad c_1 = 120.$$

Megjegyzés. A kitűzésben a értéke sajtóhiba miatt 79-nek volt megadva (az orosz és angol fordításban a helyes szöveg szerepelt). Ebből a $b_1 = 127{,}4$, és $c_1 - 117{,}0$ értékeket kapjuk (e_2^2 itt is negatív).