A1. Legyen a k adott pozitív egész szám. Az $\dfrac{1}{x^k-1}$ függvény n-edik deriváltja $\dfrac{P_n(x)}{(x^k-1)^{n+1}}$ alakú, ahol $P_n(x)$ egy polinom. Mennyi $P_n(1)$?

A2. Adott öt pont egy gömb felületén. Bizonyítsuk be, hogy van olyan zárt félgömbfelület, amelyik e pontok közül legalább négyet tartalmaz.

A3. Legyen az $n \geq 2$ egész szám, T_n pedig az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz olyan nem üres részhalmazainak a száma, amelyekben az elemek átlaga egész szám. Bizonyítsuk be, hogy $T_n - n$ páros szám.

A4. Két játékos felváltva tölt ki egy kezdetben üres 3×3-as mátrixot. A Kezdő mindig 1-et ír egy általa kiválasztott üres mezőbe, ezután Második egy 0-t ír valahová, amíg el nem készül a mátrix, amelynek így öt darab 1-es és négy darab 0 eleme van. A játékot Második nyeri, ha a kapott mátrix determinánsa 0, egyébként pedig Kezdő nyer.

Feltéve, hogy mindkét játékos optimálisan játszik, melyikük nyeri meg ezt a játékot és hogyan?

A5. Tekintsük azt a sorozatot, amelyre $a_0 = 1$, továbbá $a_{2n+1} = a_n$ és $a_{2n+2} = a_n + a_{n+1}$ teljesül minden $n \geq 0$ egész számra. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n} \colon n \geq 1\right\} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \ldots\right\}$$

halmazban valamennyi pozitív racionális szám előfordul.

A6. Adott egy $b \geq 2$ egész szám. Legyen $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ és ha $n \geq 3$, akkor legyen $f(n) = nf(d)$, ahol d a b-alapú számrendszerben felírt n szám jegyeinek a száma. A b mely értékeire konvergens a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ sor?

B1. Shanille O'Keal az All-Star gálára készülve a 3-pontos zónából gyakorolja a kosárra dobást. Az első dobása sikerül, a másodiknál hibázik, ezek után pedig minden újabb dobáskor az addigi sikeres kísérleteinek az aránya annak a valószínűsége, hogy betalál a kosárba. Mennyi a valószínűsége, hogy az első száz dobásból pontosan ötvenszer ér el kosarat?

B2. Egy poliéderen, amelynek legalább öt lapja van és amelynek minden csúcsából pontosan három él indul ki, az alábbi játékot játssza két játékos: felváltva látnak el a kézjegyükkel egyet a poliéder addig még nem szignált lapjai közül és az a győztes, akinek először sikerül a nevét három olyan lapra felírnia, amelyeknek van közös csúcsa.

Bizonyítsuk be, hogy a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.

B3. Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 1$ egész szám, akkor

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}.$$

B4. Az $[1; 2002]$ intervallumban véletlenszerűen, egyenlő valószínűséggel kiválasztok egy egész számot. A partnerem tippelhet ennek a számnak az értékére és az a célja, hogy **páratlan** számú tippel találjon rá. Ha egy tipp hibás, akkor annyit árulok el neki, hogy a kiválasztott szám kisebb, vagy nagyobb-e, mint a tippelt érték, ezután pedig a partneremnek meg **kell** neveznie egyet a még lehetséges számok közül.

Bizonyítsuk be, hogy kérdezhet úgy, hogy 2/3-nál nagyobb valószínűséggel elérje a célját.

B5. Egy pozitív egészt b-alapú palindromnak nevezünk, ha b-alapú számrendszerben felírva ugyanazt a számot kapjuk, ha a számjegyeit fordított sorrendben olvassuk. A 2002 például 4-jegyű 10-alapú palindrom. A 200 ugyan nem 10-alapú palindrom, de mivel a 9-es számrendszerben 242, a 7-es számrendszerben pedig 404, azért mindkét számrendszerben háromjegyű palindrom.

Bizonyítsuk be, hogy van olyan egész szám, amelyik legalább 2002 különböző b-re 3-jegyű b-alapú palindrom.

B6. Legyen p egy adott prímszám és tekintsük az alábbi mátrix determinánsát:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x^p & y^p & z^p \\ x^{p^2} & y^{p^2} & z^{p^2} \end{pmatrix}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ez a determináns egész együtthatós $ax + by + cz$ alakú polinomok szorzatával kongruens modulo p. (Két egész együtthatós polinomot kongruensnek mondunk modulo p, ha a megfelelő tagok együtthatói rendre kongruensek modulo p.)