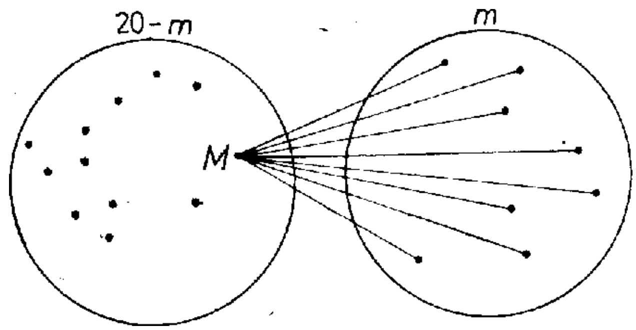
Tegyük fel, hogy a társaságban M fogott a legtöbbször kezet (vagy legalábbis a legtöbbször kezet fogók egyike), és jelöljük M kézfogásainak a számát m-mel. Az az m ember, akikkel M kezet fogott, csak a többi $(20-m)$ emberrel (köztük M-mel) foghatott kezet, hiszen ha közülük bármely kettő egymással kezet fogna, M-et hozzájuk véve három olyan embert kapnánk, akiknek a létezését a feladat kizárja.



Számoljuk most össze a kézfogásokat úgy, hogy mindegyiket mindkét érintett személynél számításba vesszük. Azoknál, akikkel M kezet fogott, összesen legfeljebb $m(20-m)$ kézfogást kaphatunk: m embernél fejenként legfeljebb $(20-m)$ kézfogást. A többieknél (köztük M-nél is) legfeljebb m kézfogást számíthatunk, és mivel ők $(20-m)$-en vannak, összesen ismét legfeljebb $m(20-m)$-et kapunk. Ez összesen $2m(20-m)$, de így minden kézfogást kétszer számoltunk, a kézfogások száma tehát legfeljebb $m(20-m)$ lehet. Ez akkor maximális, ha $m=10$, tehát a társaságban legfeljebb 100 kézfogásra kerülhetett sor. Pontosan ennyi kézfogás volt, ha például 10 nő és 10 férfi volt a társaságban, és minden nő minden férfival kezet fogott. Ekkor bárhogy veszünk ki hármat a társaságból, van köztük két egynemű, akik nem fogtak kezet.

Megjegyzések. 1. Feladatunkban (és megoldásában) a 20-nak nincs különösebb szerepe, általában n tagú társaságban $k(n-k)$ kézfogásra kerülhet sor, ahol $k=\left[\frac{n}{2}\right]$. Ez a tétel *Turán Pál*tól származik, és a gráfelmélet egyik első eredménye. Tehetünk a feladatban. három helyett is tetszőleges más számot, így azonban sokkal nehezebb kérdést kapunk.

2. A feladatra igen sok hibás megoldás érkezett. Ezekben ugyan a végeredmény többnyire helyes, mégsem fogadhattuk el őket, hiszen csak azt mutatták meg, hogy van olyan társaság, ahol 100 kézfogásra került sor, és ebből a feladat kérdésére vonatkozóan még semmilyen következtetést nem vonhatunk le.