1. *Az (a_n) sorozat tagjai azok a pozitív egész számok, amelyek 8-cal osztva 5-öt adnak maradékul, a (b_n) sorozat tagjai azok a pozitív egész számok, amelyek 6-tal osztva 1-et adnak maradékul. Jelöljük S_n-nel és T_n-nel az (a_n), illetve (b_n) sorozat első n tagjának összegét.*

a) Mekkora n, ha $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{25}{16}$?

b) Melyik az a legkisebb n, amelyre $S_n-T_n>1000$?

Megoldás. A sorozatok n-edik tagjai $a_n=5+(n-1)\cdot 8=8n-3$, illetve $b_n=1+(n-1)\cdot 6=6n-5$, ezért

$$S_n=\frac{5+(8n-3)}{2}\cdot n\equiv 4n^2+n,\quad \text{illetve}\quad T_n=\frac{1+(6n-5)}{2}\cdot n\equiv 3n^2-2n.$$

a) $\dfrac{n(4n+1)}{n(3n-2)}=\dfrac{25}{16}$, ha $n=6$.

b) $S_n-T_n=n^2+3n$, $n^2+3n>1000$, $n>0$ esetén $n>\dfrac{1}{2}\big(-3+\sqrt{4009}\big)$, így a legkisebb n a 31.

2. *Az A, illetve a B pont helyvektora $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$. Az OA szakasz O-hoz közelebbi harmadoló pontja D, az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontja E, a BD és OE egyenesek metszéspontja P. Fejezzük ki $\mathbf{a}$-val és $\mathbf{b}$-vel az $\overrightarrow{OP}$ és a $\overrightarrow{PD}$ vektorokat.*

Megoldás. A feltétel szerint $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}\mathbf{a}$, így $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\mathbf{a}-\mathbf{b}$; $\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$; $\overrightarrow{OP}=\alpha\cdot\dfrac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$; $\overrightarrow{PD}=\beta\left(\dfrac{1}{3}\mathbf{a}-\mathbf{b}\right)$; és $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PD}$.

$$\frac{1}{3}\mathbf{a}=\frac{\alpha}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b})+\beta\left(\frac{1}{3}\mathbf{a}-\mathbf{b}\right),$$
$$\mathbf{a}=2\alpha\cdot\mathbf{a}+\alpha\cdot\mathbf{b}+\beta\cdot\mathbf{a}-3\beta\cdot\mathbf{b},$$
$$(1-2\alpha-\beta)\cdot\mathbf{a}=(\alpha-3\beta)\cdot\mathbf{b}\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{R}).$$

Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos vektorok, azért $\gamma\mathbf{a}=\delta\mathbf{b}$ akkor és csak akkor, ha $\gamma=0$ és $\delta=0$. Ezért $2\alpha+\beta=1$ és $\alpha=3\beta$, tehát $\beta=\dfrac{1}{7}$, $\alpha=\dfrac{3}{7}$. Így $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{7}(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$ és $\overrightarrow{PD}=\dfrac{1}{21}\mathbf{a}-\dfrac{1}{7}\mathbf{b}$.

3. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:*

$$a)\quad \sqrt{1-4x+4x^2}+2x-1=0;\qquad b)\quad x^{\log_3 x}=\sqrt[9]{81};$$
$$c)\quad \sin 2x+7\cos 2x=1.$$

Megoldás. *a)* $1-4x+4x^2\equiv(1-2x)^2$, $\sqrt{(1-2x)^2}=|1-2x|$, $|1-2x|=1-2x$ pontosan akkor, ha $1-2x\ge 0$. Az egyenlet megoldásai az $x\le\dfrac{1}{2}$ valós számok.

b) Vegyük mindkét oldal hármas alapú logaritmusát (ez ekvivalens átalakítás), és vegyük figyelembe, hogy $\sqrt[9]{81}=3^{\frac{4}{9}}$, valamint $(\log_3 x)^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$, azaz $\log_3 x=\dfrac{2}{3}$, vagy $\log_3 x=-\dfrac{2}{3}$. Az egyenlet megoldásai: $x_1=3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{9}$ vagy $x_2=3^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$.

c) Az alábbi egyenletrendszert kell kielégítenie a $\sin 2x$ és a $\cos 2x$ ismeretleneknek:

$$\sin 2x+7\cos 2x=1$$
$$\sin^2 2x+\cos^2 2x=1$$

Az egyenletrendszer megoldásaként $\cos 2x=0$ és $\sin 2x=1$, vagy $\cos 2x=0{,}28$ és $\sin 2x=-0{,}96$ adódik, amiből $2x=\dfrac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$, $x_1=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$; vagy $2x=1{,}28+k\cdot 2\pi$, $x_2=0{,}64+k\pi$.

4. *Tekintsük azt a szabályos négyoldalú gúlát, amelynek minden éle egyenlő, és a beírható gömb sugara $\varrho=1$ egység. Számítsuk ki a gúla éleinek a hosszát.*

Megoldás. Tekintsük a gúlának azt a síkmetszetét, amely átmegy az alapnégyzet két szemközti élének felezőpontján és a gúla csúcsán. Ez a sík a gúlából egy olyan egyenlő szárú háromszöget metsz ki, amelybe írt kör a gömb egy főköre. Legyen a gúla éle a. Ekkor ezen egyenlő szárú háromszög alapja a, szára az oldallapot alkotó egyenlő oldalú háromszög magasságával egyenlő, tehát $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, a beírható kör sugara $\varrho=1$. A háromszög alaphoz tartozó m magasságára:

$$m^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\equiv\frac{2}{4}a^2,\qquad m=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

A háromszög területe $T=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$, a háromszög félkerülete $s=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, mivel $\varrho=\dfrac{T}{s}$, ezért

$$1=\frac{\frac{a^2\sqrt{2}}{4}}{\frac{a}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)},$$

ahonnan $a=\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ egység.

5. *Az ABC háromszögben az A csúcsnál levő szög a B csúcsnál levő szög kétszerese, továbbá $6AB=5BC$, és a háromszög területének mérőszáma az A csúcsnál levő szög szinuszának $62{,}5$-szerese. Számítsuk ki a háromszög oldalait.*

Megoldás. A feltétel szerint $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{5}{6}$. Legyen $AB=5x$, ekkor $BC=6x$, és legyen $AC=b$. Hosszabbítsuk meg az AB oldalt az A-n túl az $AD=b$ szakasszal. Mivel $CAB\sphericalangle=2ABC\sphericalangle$, azért ha $ABC\sphericalangle=\beta$, akkor $CAB\sphericalangle=2\beta$. A CAB szög a DAC egyenlő szárú háromszög külső szöge, ezért $CDA\sphericalangle=DCA\sphericalangle=\beta$. A DBC és a DCA egyenlő szárú háromszögek 2-2 szöge β, tehát hasonlók. A megfelelő oldalak aránya megegyezik, tehát $\dfrac{b+5x}{6x}=\dfrac{6x}{b}$, ahonnan $b^2+5xb-36x^2=0$, s mivel $b>0$, azért $b=4x$. A területre adott feltétel alkalmazásával

$$\frac{4x\cdot 5x}{2}\cdot\sin\alpha=62{,}5\cdot\sin\alpha,$$

ahonnan $x^2=6{,}25$; $x=2{,}5$ $(x>0)$. A háromszög oldalai tehát: $AB=12{,}5$; $AC=10$; $BC=15$ egység.

6. *Írjuk fel annak a $P(-1;-1)$ ponton áthaladó körnek az egyenletét, amely érinti az $x+2y-6=0$ és a $2x-y+3=0$ egyenletű egyeneseket.*

Megoldás. A két egyenes merőleges egymásra, metszéspontjuk a $Q(0;3)$ pont. A $P(-1;-1)$ pont abban a síknegyedben van, amelynek pontjaira $y\le 3$. Legyen a keresett kör középpontja $K(u;v)$, sugara r. A K pont az adott egyenesektől egyenlő távolságra van, így $\dfrac{|u+2v-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|2u-v+3|}{\sqrt{5}}$, ahonnan $u-3v=-9$ vagy $3u+v=3$. Most az utóbbira van szükségünk, tehát $v=3-3u$. A keresett kör egyenlete:

$$(x-u)^2+\big(y-(3-3u)\big)^2=r^2. \tag{1}$$

Az $(u;3-3u)$ pont a $2x-y+3=0$ egyenletű egyenestől r távolságra van, tehát

$$r=\frac{\big|2u-(3-3u)+3\big|}{\sqrt{5}},\qquad r^2=5u^2.$$

A $P(-1;-1)$ pont koordinátái kielégítik az (1) egyenletet:

$$(-1-u)^2+\big(-1-(3-3u)\big)^2=5u^2,$$

ahonnan $5u^2-22u+17=0$, $u=1$ vagy $u=\dfrac{17}{5}$. A feltételeknek két kör felel meg, ezek egyenlete: $(x-1)^2+y^2=5$, illetve $\left(x-\dfrac{17}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{36}{5}\right)^2=\dfrac{289}{5}$.

7. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán, ahol a valós paraméter:*

$$a)\quad (a+2)\cdot y+\frac{a}{y-2}=4a+6;\qquad b)\quad (a+2)\cdot 3^x+\frac{a}{3^x-2}=4a+6.$$

Megoldás. *a)* $y=2$ az egyenletnek nem lehet megoldása. Átalakításokkal

$$(a+2)y^2-(6a+10)y+9a+12=0.$$

Ha $a=-2$, akkor az egyenlet megoldása $y_0=3$. Ha $a\ne-2$, akkor $y_1=3$, $y_2=\dfrac{3a+4}{a+2}$, így y_1 megoldás; míg $y_2\ne 2$, tehát $a\ne 0$ esetén y_2 is megoldás és $a=0$ esetén egyetlen megoldás az y_1.

b) Ha $a=-2$, akkor $3^x=3$, $x_0=1$ a megoldás. Ha $a\ne-2$, akkor $3^x=3$, $x_1=1$ mindig megoldás; míg $3^x=\dfrac{3a+4}{a+2}$ akkor ad megoldást, ha $\dfrac{3a+4}{a+2}>0$ és $\dfrac{3a+4}{a+2}\ne 2$, azaz $x_2=\log_3\dfrac{3a+4}{a+2}$ akkor megoldás, ha $a<-2$ vagy $-\dfrac{4}{3}<a<0$ vagy $a>0$.

8. *Melyek azok a valós számokból álló számpárok, amelyek kielégítik az*

$$x^{\sqrt{\log_x y}}=y^{\sqrt{\log_y x}}$$

kétismeretlenes egyenletet?

Megoldás. A logaritmus értelmezése szerint $x > 0$, $x \neq 1$ és $y > 0$, $y \neq 1$ kell, hogy teljesüljön.

Mindkét oldalon álló kifejezés akkor értelmezett, ha $x > 1$ és $y > 1$, vagy $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, hiszen $\log_x y \geq 0$ és $\log_y x \geq 0$ kell, hogy teljesüljön.

Valóban, ha $x > 1$, akkor $y \geq 1$ és $y \neq 1$, tehát $y > 1$, és ha $0 < x < 1$, akkor $0 < y \leq 1$ és $y \neq 1$, tehát $0 < y < 1$. Az egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk, ha mindkét oldalon álló kifejezésnek vesszük az x alapú logaritmusát. $\log_x x^{\sqrt{\log_x y}} \equiv \sqrt{\log_x y}$ és $\log_x y^{\sqrt{\log_y x}} \equiv \sqrt{\log_y x} \cdot \log_x y \equiv \sqrt{(\log_y x \cdot \log_x y) \cdot \log_x y} = \sqrt{\log_x y}$. (Felhasználtuk, hogy $\log_x y > 0$ és $\log_y x \cdot \log_x y = 1$.) Az egyenlet megoldásai pontosan azok az (x, y) számpárok, amelyekre $x > 1$ és $y > 1$, vagy $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$. Az egyenlet ezen számpárok halmazán azonosság.