

Szendrei János matematikus, főiskolai tanár tiszteletére

1. Egy derékszögű háromszögben a befogók összege 10,5 egység, a beírható kör sugara $\rho = 1,5$ egység. Számítsuk ki a derékszögű háromszög

- a) körülírt körének sugarát;
- b) területét;
- c) a hozzáírható körök sugarát.

2. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sqrt[3]{x + \frac{x}{x^3 - 1}} &= x \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{x^3 - 1}}; & \text{b)} \quad \frac{\log_x \frac{9}{4}}{\log_x \frac{27}{8}} &= \frac{\frac{9}{4}}{\frac{27}{8}}; \\ \text{c)} \quad \operatorname{tg}(x + \pi) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) &= 2 \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán, ahol a valós paraméter:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 - a - a^2; \\ \log_x(2x^2 + 4x - y + 1) &= 2. \end{aligned}$$

4. Az $ABCD$ húrtrapéz ($AB \parallel DC$) rövidebb párhuzamos oldalának hossza, $DC = 13$ egység, magassága, $m = CC_1 = 15,6$ egység (C_1 a C pont merőleges vetülete az AB oldalra), az AC átló merőleges a BC oldalra. Számítsuk ki a hosszabb párhuzamos oldal (AB), a szárak (BC) és az átlók (AC) hosszát.

5. Az $y = x^2 + x + 1$ egyenletű parabola melyik pontja van a legközelebb az $y = 2x - 2$ egyenletű egyeneshez? Mennyi ez a legkisebb távolság?

6. Az ABC háromszögben $AC = 8$, $BC = 24$, a C csúcsból induló belső szögfelezőszakasz, $CC_1 = 6\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ egység. Számítsuk ki az ACB szöget, a háromszög területét és az AB oldal hosszát.

7. Tekintsük az $x \mapsto \frac{x}{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt. Határozzuk meg a függvény értékkészletét. Mely x helyen veszi fel a függvény a legkisebb, illetve a legnagyobb értékét?

8. Legyen az (a_n) számtani sorozat n . tagja a_n , k . tagja a_k , az első n tag összege S_n , az első k tag összege S_k , valamint $a_1 \neq 0$, $n \neq 1$, $k \neq 1$ és $n \neq k$.

Igazoljuk, hogy $\frac{S_n}{S_k} = \frac{n^2}{k^2}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{a_n}{a_k} = \frac{2n - 1}{2k - 1}$.