**1.** *Egy húr és érintőtrapéz egyik párhuzamos oldalának hossza* 10 *egység, a beírható kör sugara* $\varrho = 5\sqrt{3}$ *egység. Hány százaléka a beírt kör területe a trapéz területének?*

**Megoldás.** Belátható, hogy ha egy húr- és érintőtrapéz párhuzamos oldalainak hossza $2a$, illetve $2b$, a beírható kör sugara $\varrho$, akkor $\varrho^2 = ab$. (Lássuk be!) Most $2a = 10$, $\varrho = 5\sqrt{3}$, tehát $75 = 5 \cdot b$, azaz $b = 15$, $2b = 30$ egység. A beírható kör területe $T_1 = 75\pi$ területegység, a trapéz területe $T_2 = \dfrac{10+30}{2} \cdot 10\sqrt{3} = 200\sqrt{3}$ területegység. Mivel

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{8} \approx 0{,}680,$$

ezért a beírható kör területe a trapéz területének a 68%-a.

**2.** *Két város távolsága* 560 km. *Két gépkocsi közül az egyik* 1 *órával kevesebb idő alatt teszi meg ezt az utat, mint a másik gépkocsi, mert a sebessége* 10 $\dfrac{\text{km}}{\text{óra}}$*-val nagyobb, mint a másiké. Számítsuk ki a gépkocsik sebességét!*

**Megoldás.** Jelölje $v$ a lassabban haladó gépkocsi sebességét, ekkor a gyorsabb gépkocsié $v + 10$. A feltétel szerint $\dfrac{560}{v} - \dfrac{560}{v+10} = 1$, ahonnan $v_1 = 70$, $v_2 = -80$. A gépkocsik sebessége 80 km/óra, illetve 70 km/óra.

**3.** *Az* $f : x \mapsto \log_a x$, $x \in \mathbb{R}^+$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ *logaritmusfüggvény grafikonjára illeszkedik a* $P(b; -2)$ *és a* $Q(16b; 6)$ *pont. Határozzuk meg* $a$ *és* $b$ *értékét, majd írjuk fel a* $PQ$ *egyenes egyenletét!*

**Megoldás.** A logaritmusfüggvény értelmezése miatt $b > 0$. A feltételek szerint $-2 = \log_a b$ és $6 = \log_a 16b$, azaz $a^{-2} = b$ és $a^6 = 16b$, ahonnan $a = \sqrt{2}$ és $b = \dfrac{1}{2}$, tehát $P\left(\dfrac{1}{2}; -2\right)$, $Q(8; 6)$. A $PQ$ egyenes egyenlete $16x - 15y = 38$.

**4.** *Milyen valós* $x$ *értékekre van értelmezve a*

$$\frac{\sin 2x + 2\sin x}{\sin 2x - 2\sin x} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

*kifejezés és mi az értékkészlete?*

**Megoldás.** A kifejezés akkor értelmezhető, ha $\sin 2x - 2\sin x \neq 0$ és $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ értelmezve van, azaz ha $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tehát $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Az első tényező:

$$\frac{\sin 2x + 2\sin x}{\sin 2x - 2\sin x} \equiv \frac{2(\sin x)(\cos x + 1)}{2(\sin x)(\cos x - 1)} \equiv \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \quad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}),$$

a második tényező:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad (x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}).$$

Mivel $\dfrac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \cdot \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \equiv -1$ $(x \neq k\pi)$, ezért az értékkészlet a $\{-1\}$ számhalmaz.

**5.** *Írjuk fel annak a* $P(0; 2)$ *ponton átmenő* $\sqrt{8}$ *sugarú körnek az egyenletét, amelyet kívülről érint az* $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 8 = 0$ *egyenletű kör!*

**Megoldás.** Az adott kör egyenlete $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 2$ alakban írható, tehát középpontja $K(-1; -3)$ és sugara $r = \sqrt{2}$. Legyen a keresett kör középpontja $C(u; v)$, akkor egyenlete $(x-u)^2 + (y-v)^2 = 8$. A $P(0; 2)$ pont rajta van ezen a körön, tehát

$$u^2 + (2 - v)^2 = 8. \tag{1}$$

A keresett kör középpontja a $K$ ponttól $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$ távolságra van, tehát rajta van az $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 18$ egyenletű körön, ezért

$$(u+1)^2 + (v+3)^2 = 18. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletek alkotta egyenletrendszer megoldásai:

$$u_1 = 2, \quad v_1 = 0 \quad \text{vagy} \quad u_2 = -\frac{34}{13}, \quad v_2 = \frac{12}{13}.$$

A feltételeknek két kör felel meg, ezek egyenlete:

$$(x-2)^2 + y^2 = 8, \quad \text{illetve} \quad \left(x + \frac{34}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{13}\right)^2 = 8.$$

**6.** *Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:*

$$2\sqrt{\log_3 x}+\sqrt{\log_x 3}\geq 3.$$

**Megoldás.** Az egyenlőtlenségben szereplő kifejezések akkor értelmezhetők, ha $x>1$. Legyen $\sqrt{\log_3 x}=z$, ekkor $z>0$. Így $\sqrt{\log_x 3}=\sqrt{\dfrac{1}{\log_3 x}}=\dfrac{1}{z}$, tehát $2z+\dfrac{1}{z}\geq 3$. Mindkét oldalt $z>0$-val szorozva, majd rendezve kapjuk:

$$2z^2-3z+1\geq 0,$$

ami ($z>0$) akkor teljesül, ha $0<z\leq\dfrac{1}{2}$ vagy $z\geq 1$, azaz $0<\sqrt{\log_3 x}\leq\dfrac{1}{2}$ vagy $\sqrt{\log_3 x}\geq 1$, tehát $0<\log_3 x\leq\dfrac{1}{4}$ vagy $\log_3 x\geq 1$.

Az egyenlőtlenség megoldásai az $1<x<\sqrt[4]{3}$ vagy $x\geq 3$ valós számok.

**7.** *Egy $\sqrt{13}$ egység sugarú körbe olyan konvex hatszöget írunk, amelynek három oldala $2a$, másik három oldala $5a$ egység hosszú. Számítsuk ki a hatszög területét!*

**Megoldás.** A hatszögnek van olyan csúcsa, ez legyen $B$, hogy a két szomszédos csúcs távolsága $2a$, illetve $5a$. Legyen $AB=2a$ és $BC=5a$, a kör középpontja $O$. A hosszabb $AC$ ívhez tartozó középponti szög $240^\circ$, így az ehhez tartozó $ABC$ kerületi szög $120^\circ$, így $AC=2\cdot\sqrt{13}\sin 120^\circ=\sqrt{39}$ egység. Az $ABC$ háromszögben a koszinusztétel alkalmazásával $39=4a^2+25a^2-2\cdot 2a\cdot 5a\cdot\cos 120^\circ$, ahonnan $39=39a^2$, tehát $a=1$ ($a>0$).

Legyen az $AOB$ háromszög $AB$ oldalához tartozó magasság hossza $m_1$, a $BOC$ háromszög $BC$ oldalához tartozó magasság hossza $m_2$. Ekkor

$$m_1^2+a^2=13,\quad\text{illetve}\quad m_2^2+\left(\frac{5}{2}a\right)^2=13,$$

s mivel $a=1$, ezért $m_1=2\sqrt{3}$ egység, $m_2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ egység. A hatszög területe

$$T=3\left(1\cdot 2\sqrt{3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{69\sqrt{3}}{4}\ \text{területegység.}$$

**8.** *Egy sorozat első tagja $a_1=1$ és $n\geq 1$ esetén*

$$a_{n+1}=\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)\cdot a_n.$$

*Írjuk fel (zárt alakban) a sorozat $n$-edik tagját és első $n$ tagjának szorzatát!*

**Megoldás.** A definíció szerint

$$a_1=1,\quad a_2=a_1\left(1-\frac{1}{3^2}\right),\quad\ldots\quad a_n=a_{n-1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

Szorozzuk össze ezeket az egyenlőségeket figyelembe véve, hogy $a_i\neq 0$ ($i=1,2,\ldots,n$).

$$(a_1a_2a_3\cdots a_{n-1})\cdot a_n=(a_1a_2\cdots a_{n-1})\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\cdots\left(1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\right).$$

Osszuk el mindkét oldalt $(a_1a_2\cdots a_{n-1})$-gyel és alkalmazzuk az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ azonosságot.

$$a_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right),$$
$$a_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+2}{n+1},$$

Az egyszerűsítések után $a_n=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n+2}{n+1}$. A sorozat első $n$ tagjának a szorzata

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)\equiv\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{n+2}{2}.$$

(Az állítások teljes indukcióval is beláthatók.)