I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Az a_n sorozat elemeire teljesül, hogy

$$(a)\qquad a_1 = 1335,$$

$$(b)\qquad a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n,$$

ahol n pozitív egész szám.

Mivel egyenlő a_{2001}?

2. Legyen

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

$$f(y) = ay^2 + by + c,$$

ahol a, b, c valós paraméterek. Az A halmaz elemei legyenek azok az x, y valós számpárok, amelyekre $a > 0$ esetén

$$f(x) \le f(y) + (4ay + b)(x - y) - ay^2;$$

a B halmaz elemei pedig legyenek azok az x, y valós számpárok, amelyekre $a < 0$ esetén

$$f(x) \ge f(y) + (4ay + b)(x - y) - ay^2.$$

Bizonyítsa be, hogy az A halmaz azonos a B halmazzal!

3. Egy tetszőleges ABC háromszög BC, CA és AB oldalaira kifelé rajzolt négyzetek középpontjai rendre O_1, O_2 és O_3. Bizonyítsa be, hogy az $O_1O_2O_3$ háromszög oldalaira rajzolt négyzetek területének összegéből az ABC háromszög oldalaira rajzolt négyzetek területének összegét levonva az ABC háromszög területének hatszorosát kapjuk!

4. Melyek azok az x, y valós számok, amelyekre

$$x(x+1)(3x+5y) = 3, \quad \text{és} \quad x^2 + 4x + 5y = 4$$

egyszerre teljesül?

5. Oldja meg a valós számhármasok halmazán a

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \sin^2 x} + \sqrt{\frac{5}{4} - \sin^2 y} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 y + \operatorname{tg}^2 z}{2} + \frac{19}{8}$$

egyenletet!

6. Határozza meg az összes olyan p prímszámot, amelyre a $p^2 + 143\,134$ szám számjegyeinek összege teljes négyzet!

Második forduló

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$\log_3 x - 2^y + y = 3,$$

$$y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4.$$

2. Határozza meg az összes olyan derékszögű trapézt, amelynek egymást követő oldalai egy mértani sorozat egymást követő tagjai!

3. Bizonyítsa be, hogy ha egy háromszög bármelyik súlyvonalát a vele azonos csúcsból húzott belső szögfelező egyenesre tükrözzük, akkor ez az egyenes a háromszög adott súlyvonalához tartozó oldalt olyan két részre osztja, amelyek aránya a mellettük fekvő oldalak négyzetének arányával egyenlő!

4. Az $ABCD$ négyzet köré írt körvonal tetszőleges pontja legyen P. Bizonyítsa be, hogy a PA, PB, PC és PD szakaszok hossza egyszerre nem lehet racionális szám!

5. Határozza meg a

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

egyenlet összes valós gyökét, ha a p paraméter egész szám!

Harmadik (döntő) forduló

1. Az $ABCD$ téglalap A csúcsából a BD átlóra bocsájtott merőleges egyenes a BD átlót az E, a BC oldalt az F belső pontokban metszi. Adja meg az $ABCD$ téglalap szomszédos oldalainak arányát, ha az EF szakasz a C pontból $30°$-os szögben látszik!

2. Az $1; 2; 3; \ldots; 2002$ számok mint együtthatók segítségével képezzük az alábbi 2000 darab egyenletet:

$$1 \cdot x^2 + 2 \cdot 2x + 3 = 0$$

$$2 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x + 4 = 0$$

$$3 \cdot x^2 + 2 \cdot 4x + 5 = 0$$

$$\vdots$$

$$2000 \cdot x^2 + 2 \cdot 2001x + 2002 = 0.$$

Tekintsük mindegyik egyenlet valós gyökei összegének és valós gyökei reciproka összegének szorzatát, ha az létezik. Mennyi az így kapott legfeljebb 2000 darab szorzat szorzata?

3. Adott a síkban egy derékszögű koordináta-rendszer.

Az R ponthalmazt a koordináta-rendszer rácspontjai alkotják, vagyis azok a pontok, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.

Legyen az S halmaz az R-nek egy részhalmaza a következő tulajdonsággal: bármely két S-beli pontot összekötő szakasz felezőpontja nem eleme R-nek, azaz nem rácspont.

Hány elemű lehet egy ilyen S halmaz?

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c, d racionális számok és $|a| \neq |c|$, akkor az

$$(ax + b)^2 = (cx + d)^2$$

egyenlet gyökei racionális számok.

2. Milyen p és q pozitív prímszámokra igaz, hogy a

$$(p - 3q)x^2 - px + q = 0$$

egyenlet egyik gyöke pozitív prímszám?

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{10}} + \sqrt[3]{\frac{1}{5} - x} = 0.$$

4. Az ABC háromszög A és B csúcsán átmenő kör az AC oldalt P, a BC oldalt a Q belső pontban metszi. A Q-ból az AC-vel húzott párhuzamos AB-t X-ben, a P-ből a BC-vel húzott párhuzamos AB-t Y-ban metszi, $X \neq Y$. Bizonyítsuk be, hogy a P, Q, X, Y pontok egy körön vannak.

5. Az a, b, c pozitív számokra $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ teljesül. Határozzuk meg az

$$S = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$$

összeg lehető legkisebb értékét.

Második forduló

1. Ugyanabban a koordináta-rendszerben megrajzoltuk az $xy=1$ és az $xy=-1$ egyenletű görbéket (hiperbolákat). Mutassuk meg, hogy ha egy origó középpontú, R sugarú körnek a görbékkel képzett közös pontjai szabályos sokszög csúcsai, akkor a sokszög területe R^4-nel egyenlő.

2. Adjuk meg azokat az x, y, z, t valós számokat, amelyek egyidejűleg kielégítik a következő egyenletet és egyenlőtlenséget:

$$x+y+z=\frac{3}{2},$$
$$\sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}+\sqrt{4z-1}\geq 2+3^{\sqrt{t-2}}.$$

3. Legyen $f(x)$ a 0-tól és 1-től különböző valós számok halmazán értelmezett valós értékű függvény. Állítsuk elő azt az $f(x)$ függvényt, amely értelmezési tartományának minden x értékére kielégíti az

$$f(x)+kx^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x+1}$$

egyenletet, ahol k olyan állandó, amelyre $0<k^2\neq 1$ teljesül. Adjuk meg az értelmezési tartománynak azokat az x értékeit, amelyekre $f(x)=0$.

4. Az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelezőnek a k beírt körrel való metszéspontjai közül az A csúcshoz közelebbit jelölje O_A; hasonlóan kapjuk a B, illetve C csúcsból induló szögfelezőkön az O_B, illetve O_C pontokat. Az O_A körül szerkesztett, AB-t és CA-t érintő kör legyen k_A, az O_B körül szerkesztett, BC-t és AB-t érintő kör legyen k_B, és az O_C körül szerkesztett, CA-t és BC-t érintő kör legyen k_C.

Bizonyítsuk be, hogy a k_A, k_B, k_C köröknek páronként vett, az oldalegyenesektől különböző közös külső érintői egy ponton mennek át.

Harmadik (döntő) forduló

1. Az ABC háromszög AB oldalát kívülről érintő hozzáírt kör AB-t a P pontban, AC meghosszabbítását a Q pontban érinti; a BC oldalt kívülről érintő kör pedig AC meghosszabbítását az U pontban, AB meghosszabbítását az X pontban érinti.

Bizonyítsuk be, hogy a PQ és az UX egyenesek metszéspontja egyenlő távol van az AB és a BC egyenesektől.

2. Van-e olyan n-oldalú sokszög, amelyben a hegyesszögek száma $n^2-30n+236$?

3. Legyen n rögzített, 1-nél nagyobb egész szám. Adjunk meg olyan $x_1,x_2,\ldots,x_n$ valós számokat, amelyekre teljesülnek az

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=2(n-1)$$

és az

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+\cdots+(x_n-1)^2=n$$

egyenlőségek, és x_n értéke a lehető legnagyobb.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Legyen $a=1+\sqrt{5}$. Számítsuk ki az alábbi kifejezés pontos értékét:

$$(4-a)\cdot\sqrt{2+a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{3a+4}.$$

2. Legyen E és F az $ABCD$ trapéz AD, illetve BC szárának egy-egy belső pontja. Mutassuk meg, hogy ha az AF és EC egyenesek párhuzamosak, akkor az EB és DF egyenesek is párhuzamosak.

3. Tegyük fel, hogy egy kettőhatványt egy alkalmas alapú számrendszerben csupa azonos számjeggyel lehet felírni. Mutassuk meg, hogy a kettőhatvány legfeljebb kétjegyű (ebben a számrendszerben).

4. Van-e olyan nem konstans, egész együtthatós polinom, amely minden pozitív egész helyen $k!$ alakú értéket vesz fel ($k=1,2,3,\ldots$)?

5. Mennyi a (90-ből 5-ös) lottóhúzás második legnagyobb számának a várható értéke? [Várható érték: az összes lehetséges lottóhúzás mindegyikében kiválasztjuk a második legnagyobb számot, és ezeknek a számtani közepét képezzük (egy adott értéket természetesen „annyiszorosan” kell figyelembe venni, ahány lottóhúzásban ez az érték második legnagyobb számként fellép).]

Második (döntő) forduló

1. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 1)$ valós számok közül bármelyik x_i megegyezik az összes többi x_j négyzetének az összegével. Határozzuk meg az összes ilyen tulajdonságú szám-n-est.

2. Vegyünk fel egy-egy belső pontot egy paralelogramma négy oldalszakaszán. Bizonyítsuk be, hogy az általuk kifeszített négyszög kerülete legalább kétszer akkora, mint a paralelogramma rövidebbik átlója.

3. Adjuk meg a pozitív egészeknek egy olyan H részhalmazát, amely rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

(i) minden elég nagy pozitív egész előáll *legfeljebb* 100 darab H-beli (nem feltétlenül különböző) elem összegeként;

(ii) 2002 a legkisebb olyan k érték, amelyre minden elég nagy pozitív egész előáll *pontosan* k darab H-beli (nem feltétlenül különböző) elem összegeként.