KEZDŐK
Első forduló
Mindkét kategória

1. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\frac{2x}{|x-3|-5}+\frac{1}{x+2}\geq 1$$

(6 pont)

2. Az ABC derékszögű háromszög 3 egység hosszúságú AB átfogójának harmadoló pontjai E és G. Számítsa ki a CE^2+CG^2 összeg pontos értékét!
(6 pont)

3. Hány olyan 10^6-nál kisebb természetes szám van, amely számjegyeinek összege páros és a rákövetkező természetes szám számjegyeinek összege is páros?
(8 pont)

4. Egy hegyesszögű háromszögben a szokásos jelölésekkel $ac=b^2-a^2$. Bizonyítsa be, hogy $\beta=2\alpha$!
(10 pont)

5. Mely m és n 1-nél nagyobb egész számokra teljesül, hogy m osztója n-nek és $m^n\leq n^m$?
(10 pont)

Második (döntő) forduló

I. kategória: Általános tanterv szerint tanuló szakközépiskolások és gimnáziumi tanulók

1. Mi a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy konvex $ABCD$ négyszög AB és CD oldalának felezőpontjai által meghatározott szakasz felezze a négyszög területét?

2. Mely x, y és z számokra teljesül az alábbi egyenlőség?

$$4x^3+2y^3+z^3=2002\cdot xyz$$

3. Mutassa meg, hogy egy kocka csúcsainak halmazából kiválasztható néhány 4-elemű részhalmaz úgy, hogy a kocka bármely három csúcsát a kiválasztott 4-elemű részhalmazok közül pontosan egy tartalmazza!

II. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Jelöljük az ABC háromszög körülírt körén az A-t nem tartalmazó BC ív felezőpontját D-vel! Legyen D tükörképe a BC egyenesre E, az EA szakasz felezőpontja pedig K. Igazolja, hogy K és a háromszög oldalfelező pontjai egy körön helyezkednek el!

2. Mely x és y egész számokra teljesül az alábbi egyenlőség?

$$x^2y^2-x^2y-xy^2+xy+x+y=2$$

3. Legyen $n\geq 6$. Bizonyítsa be, hogy ha egy n elemű halmazból kiválasztható néhány 5-elemű részhalmaz úgy, hogy az n elemű halmaz minden 3-elemű részhalmazát a kiválasztott 5-elemű részhalmazok közül pontosan egy tartalmazza, akkor $n\geq 16$.

HALADÓK
I. kategória: Szakközépiskolák
Első (iskolai) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $0 < a < 1$ számra

$$\frac{2000^2}{1-a} + \frac{1}{a} \geq 2001^2!$$

Milyen a-ra áll fenn egyenlőség?

2. Az ABC háromszög AB oldalának B-hez közelebbi harmadolópontja H, a BC oldal B-hez legközelebbi negyedelőpontja N_1, C-hez legközelebbi negyedelőpontja N_2. A CA oldal felezőpontja F.

Bizonyítsa be, hogy az FHN_1 és az FHN_2 háromszögek területének összege az ABC háromszög területének felével egyenlő!

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 = \left(x^3 - y^3\right)^2$$

egyenletet!

4. Bizonyítsuk be, hogy 2001 egymást követő pozitív egész szám között mindig van olyan, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege osztható 27-tel!

5. Egy 20×25-ös téglalapban elhelyeztünk tetszőlegesen 120 db egységnyi oldalú négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy még egy olyan egységnyi átmérőjű kör is elfér a téglalapban, amelynek nincs közös belső pontja a négyzetekkel! (Négyzeten most négyzetlapot, körön pedig körlapot értünk.)

Második forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2001 + 2002 \cdot 2003 \cdot \ldots \cdot 4002$$

osztható 4003-mal!

2. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 10$ egyenletet!

3. Az a és b befogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó negyedrésze. Mekkora ekkor $\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$ értéke?

4. Egy 1 egység széles egyenes vonalzóval egy síkon szerkeszthetünk. Más segédeszközünk – ceruzán kívül – nincs. A szerkesztés során a következő lépések hajthatók végre:

a) tetszőleges számú pontot felvehetünk az adott síkon,

b) két felvett ponton át egyenes húzható a vonalzóval,

c) bármely megrajzolt egyenessel attól egységnyi távolságra lévő párhuzamos egyenes húzható.

Szerkesszünk $\sqrt{34}$ egység hosszú szakaszt a megengedett szerkesztési lépések alapján!

Harmadik (döntő) forduló

1. Az a, b, c, d egész számokra $a < b < c < d$ teljesül. Tudjuk, hogy az

$$\begin{aligned} E = &(b-a)(b+c+d)(c+a+d) + (c-b)(c+a+d)(a+b+d) + \\ &+ (a-c)(a+b+d)(b+c+d) \end{aligned}$$

kifejezés értéke prímszám. Mi ennek a prímszámnak az értéke?

2. Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának D pontjában az AD szakaszra állított merőleges az AB átfogót az E pontban metszi. Az E pont BC-re eső merőleges vetülete az F pont. Bizonyítsuk be, hogy a CF szakasz hossza akkor minimális, ha a D pont rajta van az A csúcsból induló szögfelezőn.

3. *a*) Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan k egész szám van, amelyre k és $k+1$ is két pozitív egész szám négyzetének összegeként írható fel.

b) Igazoljuk azt is, hogy nem létezik olyan k egész szám, amelyre a k, $k+1$, $k+2$ és $k+3$ számok mindegyike felbontható két négyzetszám összegére.

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az x és y valós számokra igaz, hogy $x+y+xy$ racionális szám, x^4+y^4 pedig irracionális szám, akkor xy csak irracionális szám lehet.

2. Az O középpontú egységnyi sugarú körbe írt $ABCD$ trapézban $BOC\sphericalangle = AOD\sphericalangle = 120^\circ$, ahol BC és AD a trapéz szárai. Mutassuk meg, hogy a trapéz területe legfeljebb $\sqrt{3}$ területegység értékű!

3. Adott a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^2 - 4|x-1| - p$ függvény, ahol p valós paraméter.
Határozzuk meg p értékét úgy, hogy x-nek pontosan 3 különböző értékére legyen az adott függvény értéke 1.

4. Bizonyítsuk be, hogy 2001 egymást követő pozitív egész szám között mindig van olyan, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege osztható 27-tel!

5. Egy 20×25-ös téglalapban elhelyeztünk tetszőlegesen 120 db egységnyi oldalú négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy még egy olyan egységnyi átmérőjű kör is elfér a téglalapban, amelynek nincs közös belső pontja a négyzetekkel! (Négyzeten most négyzetlapot, körön pedig körlapot értünk.)

Második forduló

1. Oldjuk meg az egész számok körében az

$$\begin{aligned} ab+cd &= -1 \\ ac+bd &= -1 \\ ad+bc &= -1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

2. Az a és b befogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó negyedrésze. Mekkora ekkor $\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$ értéke?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra teljesül az $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ összefüggés, akkor

$$\frac{1}{a^{1001}}+\frac{1}{b^{1001}}+\frac{1}{c^{1001}}=\frac{1}{a^{1001}+b^{1001}+c^{1001}}.$$

4. Az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlója merőleges egymásra. Az AB oldal K felezőpontjából állítsunk merőlegest DC oldalegyenesre. Ennek talppontja legyen P. Az AD oldal L felezőpontjából a BC oldalegyenesre állított merőleges talppontja legyen Q. Bizonyítsuk be, hogy a KP és LQ egyenesek az AC átló egyenesén metszik egymást!

Harmadik (döntő) forduló

1. Hány olyan pozitív egész tízes számrendszerbeli n-jegyű szám van, amelynek számjegyösszege n^3-40, ahol n pozitív egész szám?

2. Az ABC háromszögben $BC < CA < AB$. A BC oldal felező merőlegese a P, az AC oldal felező merőlegese a Q pontban metszi a C csúcsból induló magasság egyenesét. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge, ha $4CP \cdot CQ = AB^2$?

3. Tekintsük az $1, 2, 3, \ldots, 2002$ számsorozatot! Ezt a sorozatot átrendezhetjük a következő módon: egy lépésben a sorozat utolsó tagját előbbre helyezhetjük (akárhányadik helyre az $1., 2., 3., \ldots, 2002.$ sorszámú hely közül) azzal a megszorítással, hogy az előrébb helyezett tag nem előzhet meg nála nagyobb számot. A kapott új sorozatra ismét alkalmazható az előbb leírt lépés, egészen addig, amíg lehetséges. Bizonyítsuk be, hogy bármely lépés után olyan sorozatot kapunk, amelyben a $(2k-1)$-edik és a $2k$-adik tag közül az egyik páros, a másik pedig páratlan szám, bármely $1 \le k \le 1001$ esetén.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra teljesül az $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ összefüggés, akkor

$$\frac{1}{a^{1001}}+\frac{1}{b^{1001}}+\frac{1}{c^{1001}}=\frac{1}{a^{1001}+b^{1001}+c^{1001}}.$$

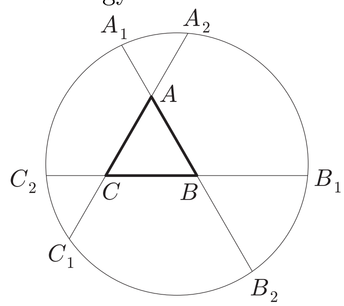
2. Az a oldalú N négyzetet a középpontja körül elforgatva az N' négyzetet kapjuk. A két négyzet közös része olyan nyolcszög, amelynek mindegyik oldala b hosszú.

a) Fejezzük ki a nyolcszög területét a-val és b-vel!

b) Ha az N és N' négyzet metszetének területe t, uniójának területe pedig T, akkor igazoljuk, hogy $\sqrt{t \cdot T} < a^2 < \sqrt{\frac{t^2 + T^2}{2}}$.

3.

A k kör belsejében levő ABC szabályos háromszög oldalegyenesei a k kört az A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 pontokban metszik a következő betűzés szerint: az AB oldalegyenes metszéspontjai a körrel A_1 és B_2. Hasonlóan: a BC egyenes metszetei a körrel B_1, illetve C_2, és a CA egyenes metszetei a körrel C_1, illetve A_2 az ábrának megfelelően.



Bizonyítsuk be, hogy

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = AA_2 + BB_2 + CC_2.$$

4. 121 darab pozitív egész számról tudjuk, hogy összegük 360. Bizonyítsuk be, hogy az adott 121 darab pozitív egész szám közül ki lehet néhányat választani úgy, hogy a kiválasztott számok összege 120 legyen.

Második (döntő) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy az összes olyan pozitív egész alapú számrendszerben, amelyben az $\overline{abc}$ és a $\overline{cba}$ pozitív egész szám hányadosa 2, teljesül az $a + c = b$ összefüggés.

2. Adott egy $2k + 1$ oldalú szabályos sokszög, melynek belsejében vagy határán felveszünk egy P pontot. P-nek a sokszög csúcsaitól mért távolságát jelölje (nagyság szerinti sorrendben) $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq 2_{2k+1}$. Milyen P pont esetén lesz d_{k+1} maximális?

3. Van N darab chip, amelyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha kettőt összekapcsolunk, akkor mindkettő kijelzi a másik chipről, hogy jó-e vagy hibás. A jó chip mindig helyesen válaszol, a hibás chip véletlenszerű eredményt ad. Tudjuk, hogy az összes chipnek több mint a fele jó. Lehetséges-e N-nél kevesebb teszt végrehajtásával kiválasztani egy jó chipet?