1. *Az $ABCD$ háromszög oldalai $AB = 20$, $BC = 13$, $CA = 11$ egység hosszúak. Számítsuk ki a háromszög területét, valamint a beírható és körülírható körének sugarát!*

Megoldás. A háromszög kerülete $2s = 44$ egység, így a Héron-képlettel a területe kiszámítható. Mivel a beírható kör sugara $\varrho = \dfrac{T}{s}$, a köré írható kör sugara $r = \dfrac{abc}{4T}$, ezért $T^2 = 22 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 9 = (11 \cdot 2 \cdot 3)^2$, $T = 66$ területegység, $\varrho = \dfrac{66}{22} = 3$ egység és $r = \dfrac{11 \cdot 13 \cdot 22}{4 \cdot 66} = \dfrac{143}{12}$ egység.

2. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet.*

$$\left(x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1}\right)\left(x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}\right) = x^4 + x^2 + 1$$

Megoldás. Az egyenletnek nincs értelme, ha $x = -1$ vagy $x = 1$. A bal oldalon álló kifejezések azonos átalakítása után kapjuk:

$$\left(x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1}\right)\left(x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}\right) \equiv \frac{x^3 - 1 + 2}{x-1} \cdot \frac{x^3 + 1 - 2}{x+1} \equiv$$
$$\equiv (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \equiv (x^2 + 1)^2 - x^2 \equiv x^4 + x^2 + 1.$$

Az egyenletnek -1 és 1 kivételével minden valós szám megoldása.

3. *A (b_n) számtani sorozat első tagja $b_1 = 3$, különbsége $d_1 = 4$; a (c_k) számtani sorozat első tagja $c_1 = 2$, különbsége $d_2 = 7$. A két sorozat közös tagjai az (a_m) sorozatot határozzák meg. Fejezzük ki m-mel az (a_m) sorozat első m tagjának az összegét!*

Megoldás. A (b_n) sorozat n-edik tagja $b_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$, a (c_k) sorozat k-adik tagja $c_k = 2 + (k-1) \cdot 7 = 7k - 5$. A közös tagokra $b_n = c_k$, $4n - 1 = 7k - 5$, azaz $4n + 4 = 7k$, ahol n és k pozitív egész számok, tehát $k = 4m$ és így $n = 7m - 1$. A közös tagok: $a_m = 4 \cdot (7m - 1) - 1 \equiv 28m - 5$ ($a_m = 7 \cdot 4m - 5 \equiv 28m - 5$), ahol m pozitív egész szám. Az (a_m) sorozat első tagja $a_1 = 23$, így az első m tag összege $S_m = \dfrac{m}{2}(23 + 28m - 5) \equiv 14m^2 + 9m$.

4. *Egy háromszög két oldalának hossza b és c egység, és tudjuk, hogy a háromszög területe $T = a^2 - (b-c)^2$. Fejezzük ki b-vel és c-vel a háromszög a oldalának hosszát!*

Megoldás. Figyelembe véve, hogy $T = \dfrac{bc \sin\alpha}{2}$ és $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, kapjuk, hogy

$$\frac{bc\sin\alpha}{2} = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha - (b^2 + c^2 - 2bc),$$
$$\sin\alpha = 4(1 - \cos\alpha), \qquad 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 4 \cdot 2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

tehát $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{4}$. Alkalmazhatjuk az $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \equiv \cos\alpha$ ($\alpha \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) azonosságot, tehát $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\dfrac{15}{17}$, $a = \sqrt{b^2 + c^2 - \dfrac{30}{17}bc}$ egység.

5. *Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert!*

$$3^{1 + 2\log_3(y-x)} = 48$$
$$2\log_5(2y - x - 12) = \log_5(y - x) + \log_5(y + x).$$

Megoldás. Az egyenletrendszer akkor értelmezett, ha $y - x > 0$, $y + x > 0$ és $2y - x > 12$.

Azonosságok és függvénytulajdonságok alkalmazásával

$$(y - x)^2 = 16 \quad \text{és} \quad (2y - x - 12)^2 = y^2 - x^2.$$

Az első egyenletből $y = x + 4$ vagy $y = x - 4$. Helyettesítő módszerrel $x^2 - 16x = 0$ vagy $x^2 + 16x + 384 = 0$. A második egyenletnek nincs valós megoldása; az első egyenletből $x_1 = 16$ és ekkor $y_1 = 20$ és ez a számpár valóban megoldás, míg ha $x_2 = 20$, akkor nem adódik megoldás.

6. *Oldjuk meg a*

$$2\sin 2x = 2\sqrt{6}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$$

egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás. Azonosságok alkalmazásával

$$\begin{aligned}4\sin x\cos x &= 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)+3,\\ 4\sin x\cos x-2\sqrt{3}\sin x+2\sqrt{3}\cos x-3&=0,\\ (2\sin x)\big(2\cos x-\sqrt{3}\big)+\sqrt{3}\big(2\cos x-\sqrt{3}\big)&=0,\\ \big(2\sin x+\sqrt{3}\big)\big(2\cos x-\sqrt{3}\big)&=0,\end{aligned}$$

ahonnan $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. A megoldások: $x_{1,n}=-\dfrac{\pi}{3}+2n\pi$, $x_{2,n}=-\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi$, $x_{3,n}=\dfrac{\pi}{6}+2n\pi$, $x_{4,n}=-\dfrac{\pi}{6}+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.

7. *Az $x+y=15$ egyenletű egyenes az x tengelyt az A, az y tengelyt a B pontban metszi. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a $3x+y=2002$ egyenletű egyenesre, metszi az OB szakaszt a C, az AB szakaszt a D pontban, és amelyre az $OADC$ négyszög területe 58,5 területegység, ahol O az origó!*

Megoldás. A $3x+y=2002$ egyenletű egyenesre merőleges egyenesek egyenlete $y=\dfrac{1}{3}x+b$ alakban írható, így $C(0;b)$. A D pont abszcisszája b-vel kifejezhető: $x+\left(\dfrac{1}{3}x+b\right)=15$, $x=\dfrac{3}{4}(15-b)$. mivel $A(15;0)$, $B(0;5)$, ezért az AOB háromszög területe $T=\dfrac{15^2}{2}=112{,}5$ területegység, így a BCD háromszög területe egyrészt $T_1=112{,}5-58{,}5=54$ területegység, másrészt b-vel kifejezve $T_1=\dfrac{1}{2}(15-b)\cdot\dfrac{3}{4}(15-b)$ területegység. Innen

$$\frac{3}{8}(15-b)^2=54,\qquad b_1=3,\quad b_2=27.$$

Mivel $0<b<15$, ezért $b=3$. A kérdéses egyenes egyenlete $y=\dfrac{1}{3}x+3$ $(x-3y=-9)$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $(x;y)$ számpárra $x^2+y^2=18$, akkor $|x+y|\le 6$. Mely számpárokra áll fenn az egyenlőség?*

Megoldás. Vegyük figyelembe, hogy minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ számpárra $2xy\le x^2+y^2$ és $|a|\equiv\sqrt{a^2}$. Így $|x+y|\equiv\sqrt{x^2+y^2+2xy}\le\sqrt{2(x^2+y^2)}=6$. Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y$, azaz $x^2=9$, tehát az $x_1=3$, $y_1=3$ és az $x_2=-3$, $y_2=-3$ számpárok esetén.