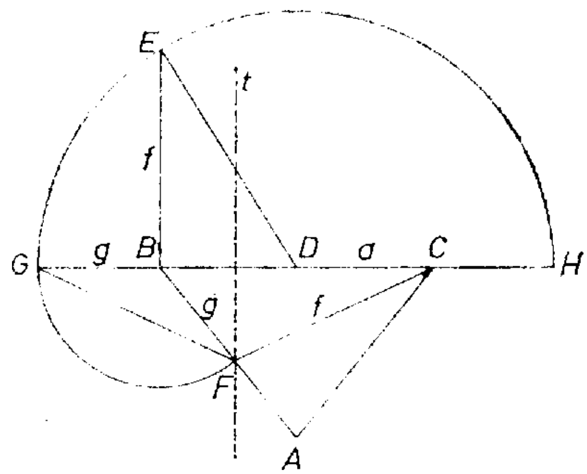
Jelöljük az alap végpontjait B-vel, C-vel, a szemközti csúcsot A-val, a C-ből induló szögfelező AB-n levő pontját F-fel, és mérjük fel BC-nek B-n túli meghosszabbítására a

$$BG = BF = g$$

szakaszt.



A kapott BFG háromszög egyenlő szárú, és az alapján levő szögei az ABC háromszög B-nél levő szögének a felével egyenlőek. Emiatt CFG is egyenlő szárú, és hasonló GFB-hez. Így $BG : GF = FC : CG$, vagyis

(1) $$g : f = f : (g + a).$$

Ez g-re másodfokú egyenlet, amelynek gyökei

$$g_{12} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + f^2},$$

tehát (1)-nek mindig pontosan egy pozitív gyöke van:

(2) $$g = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + f^2} - \frac{a}{2}.$$

Mérjük fel a $BC = a$ szakaszra merőlegesen a $BE = f$ szakaszt, és rajzoljunk BC-nek D felezőpontja körül E-n átmenő kört. Messe ez BC-t a G, H pontokban ($GB < HB$), akkor a kör húrjaira vonatkozó tétel szerint $BE^2 = BG \cdot BH$, tehát a $BG = CH = g$ szakasz az (1) egyenlet pozitív gyöke. Rajzoljunk B körül G-n átmenő kört, messe ez CG-nek t felező merőlegesét F-ben. Megmutatjuk, hogy ha F létrejön és BE-nek C-t tartalmazó oldalán van, akkor ez az, amit kerestünk, tehát belőle a BCF szöget megduplázva a keresett ABC háromszöget kapjuk. Ha pedig a feltételeink nem teljesülnek, akkor nincs a feladatnak megoldása.

A most megszerkesztett F pont mellett BFG és FCG hasonló egyenlő szárú háromszögek, tehát a $CF = GF = x$ szakaszra

$$g : x = x : (g + a)$$

teljesül, így az (1) alapján egyenlő f-fel. Mivel a $CBF\sphericalangle$ kétszerese a $BCF = BGF$ szögnek, a BCF szög megduplázásával valóban a keresett háromszöget kapjuk, ha a BCF szög hegyesszög. Ennek és F létrejöttének a feltétele

$$g > \frac{a + g}{2} - g > 0,$$

ami (2) szerint ekvivalens azzal, hogy

(3) $$\frac{2}{3}a < f < \sqrt{2}a.$$

Ez tehát a szerkeszthetőség feltétele, és nyilván ez a megoldás létezésének is a feltétele.

A mondott $f = a$ és $f = a/\sqrt{2}$ speciális esetekre teljesül (3), így a szerkesztés végrehajtható. Az első esetben $BE = BC$, tehát E és C annak az a sugarú körnek a pontjai, amelybe írt szabályos tízszögnek egyik cikke a BCF háromszög. Ráismerhetünk a $BF = g$ szakasz klasszikus szerkesztésére a fenti megoldásban, mi mintegy azt általánosítottuk az $f \neq a$ esetre.

Ha pedig $f=a/\sqrt{2}$, akkor (2) szerint

$$a-g=(3-\sqrt{3})\frac{a}{2}=\sqrt{3}g,$$

tehát $DBF\sphericalangle=30^\circ$.

Megjegyzés. A CGF háromszög alapján levő δ szögre

$$\cos\ \delta=\frac{CG}{2GF}=\frac{a+g}{2f},$$

így a $\cos\ \delta$ ismeretlenre ugyanúgy másodfokú egyenletet kapunk, mint g-re. A megoldók többsége ezt az utat választotta.