[1]

A magyar mozik nemrég játszották az „Egy csodálatos elme” című amerikai játékfilmet, amely John F. Nash matematikus életéről szól, aki Harsányi Jánossal és Reinhard Selten-nel együtt 1994-ben elnyerte a közgazdasági Nobel-díjat. A nagy sikerű film azonban nem annyira Nash munkásságával, sokkal inkább betegségével foglalkozott, így kevés derült ki arról, miért is kapott Nash Nobel-díjat. E rövid cikkben ezt próbáljuk meg néhány egyszerű példán keresztül bemutatni.

Nem-kooperatív játékelmélet

Nash fő eredményét a nem kooperatív játékelmélet területén érte el, amely olyan stratégiai játékokkal (más néven: *szituációkkal*) foglalkozik, ahol a játékosokról (más néven: *aktorokról*) feltesszük, hogy nem kötnek megállapodásokat egymással, más szóval az egyes játékosokat, nem pedig csoportjaikat tesszük a vizsgálat tárgyává. Feltesszük továbbá, hogy minden játékos ismeri a saját maga és a többi játékos által választható lehetőségeket (más néven: *stratégiákat*), és az ezekhez a lehetőségekhez tartozó hasznosságokat (más néven: *kifizetéseket*). Emellett minden szereplő tudja mindezt, sőt azt is, hogy ezeknek az információknak a többi játékos is birtokában van.

A játékokat leggyakrabban úgynevezett normál (egyes irodalmakban: stratégiai) alakban írják fel, ahol egy táblázatban jelölik azt, hogy az egyes stratégiák választása mekkora hasznosságot eredményez az azt választó játékos számára. Vegyük például az alábbi klasszikus kétszemélyes játékot, melyet általában *fogolydilemma* néven emlegetnek: két betörőt, aki együtt követett el egy rablást elfognak, és külön-külön (egyidőben) vallatni kezdik őket. Mindkettőjüknek a következő alkut ajánlják: ha azt vallja, hogy a másik követte el a rablást, a másik börtönbe kerül, ő pedig pénzjutalmat kap. Ha mindketten a másikra vallanak, akkor mindketten börtönbe kerülnek és pénzjutalmat is kapnak, míg ha egyikük sem vall, mindketten szabadon maradnak, de pénzjutalomban nem részesülnek.

A játékot az alábbi táblázattal írhatjuk le (a két játékost nevezzük Sor-nak és Oszlop-nak.):

		Oszlop			
		Nem vall		Vall	
Sor	Nem vall	3000	3000	0	4000
	Vall	4000	0	1000	1000

Sor stratégiáit (vall, nem vall) a vízszintes sorok, míg Oszlop stratégiáit (vall, nem vall) a függőleges oszlopok mutatják. A táblázatban szereplő két szám közül az első Sor, míg a második Oszlop hasznosságait tartalmazza; ezek a számok úgy jöttek létre, hogy a szabadon bocsátáshoz 3000-et, a pénzjutalomhoz pedig 1000-et rendeltünk hozzá. A jobb felső cellát tehát így olvashatjuk: ha Sor nem vall, Oszlop viszont vall, akkor Sor számára nulla, míg Oszlop számára 4000 egység lesz a játék hasznossága.

Mi lehet ennek a játéknak a megoldása, vagyis milyen stratégiákat fognak választani a játékosok (akikről, ne felejtsük, feltettük, hogy csak a saját hasznosságukat maximalizálják)? Első látásra azt várnánk, hogy mindkettőjük számára az a legjobb választás, ha nem vallanak, hiszen így mindketten szabadok maradnak. Viszont ha Sor tudja, hogy Oszlop nem vall, akkor ő jobban jár, ha vall, mivel pénzjutalmat is kap. Sőt, akkor is jobban jár, ha Oszlop vall, hiszen akkor legalább a pénzjutalmat megkapja.

Ebben a játékban a „vall” stratégia dominálja a „nem vall” stratégiát, azaz a másik stratégiánál nagyobb hasznossághoz vezet – bármit választ is a másik játékos. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a játék „domináns egyensúllyal” rendelkezik, amelyben mindkét játékos a másikra vall, börtönbe kerül, és elteszi a pénzjutalmat. Érdemes megjegyezni, hogy ez az eredmény független attól, hogy milyen pozitív számot rendelünk a pénzjutalomhoz, ill. a szabadon bocsátáshoz.

Formálisan: Egy kétszemélyes J játékot adottnak tekintünk, ha adottak a Σ_1, Σ_2 stratégiahalmazok, valamint az ezeken értelmezett $H_1(\sigma_1, \sigma_2)$, $H_2(\sigma_1, \sigma_2)$ hasznosságfüggvények, ahol a hasznosságfüggvény i-edik argumentuma az i-edik játékos által választott stratégia ($\sigma_1 \in \Sigma_1$, $\sigma_2 \in \Sigma_2$).

Ha létezik egy $(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ stratégiapár, amelyre

$$H_1(\sigma_1^*, \sigma_2) \geq H_1(\sigma_1, \sigma_2) \quad \text{és} \quad H_2(\sigma_1, \sigma_2^*) \geq H_2(\sigma_1, \sigma_2)$$

bármely $\sigma_1 \in \Sigma_1$, $\sigma_2 \in \Sigma_2$ stratégiára, akkor azt mondjuk, hogy (σ_1^*, σ_2^*) *domináns egyensúly.*

A kétszemélyes játékoknak megemlítjük néhány speciális osztályát: ilyenek a *zérus összegű játékok,* amelyekben a játékosok adott stratégiához tartozó hasznosságainak összege mindig nulla ($H_1(\sigma_1, \sigma_2) = -H_2(\sigma_1, \sigma_2)$), és a *szimmetrikus játékok,* ahol a két játékos stratégiahalmaza megegyezik, és a fordított stratégiapárok a másik játékos számára azonos hasznosságokat eredményeznek ($H_1(\sigma_1, \sigma_2) = H_2(\sigma_2, \sigma_1)$). A fogolydilemma szimmetrikus, de nem zérus összegű játék.

Nash-egyensúly

A fogolydilemmában volt domináns egyensúly, de a legtöbb játékban nincs. Mit tudunk mondani a játék kimeneteléről ezekben az esetekben?

Vegyük például a következő játékot, amelynek angol neve „battle of sexes” (magyarra talán családi vitaként fordíthatnánk): Sor és Oszlop együtt járnak, és szombat esti programjukat tervezik. Sor rockkoncertre szeretne menni,

[1]Köszönetet mondok szüleimnek és *Váradi Balázsnak,* akik értékes megjegyzéseivel és javaslataival segítették munkámat.

Oszlop viszont otthon szeretne maradni, hogy tanuljon. Egyikük sem szeretné azonban a másik nélkül tölteni az estét. Ha a kedvenc időtöltéshez is és az együttléthez is 1-et rendelünk hozzá, akkor a játékot az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze:

		Oszlop			
		Koncert		Tanulás	
Sor	Koncert	2	1	1	1
	Tanulás	0	0	1	2

A szimmetrikus, nem zérus összegű játékban a fogolydilemmához hasonlóan létezik domináns egyensúly: az, amikor Sor koncertre megy, Oszlop pedig otthon marad. Változtassuk meg azonban a játék feltételeit úgy, hogy az együttes programot – bármelyik legyen is az – a „kedvenc” program elé helyezzük:

		Oszlop			
		Koncert		Tanulás	
Sor	Koncert	2	1	0	0
	Tanulás	0	0	1	2

Ez a játék továbbra is szimmetrikus, és persze nem zérus összegű. Ha a hasznosságokat alaposan szemügyre vesszük láthatjuk, hogy az eddigi esetektől eltérően egyik játékosnak sincs olyan stratégiája, amely jobb lenne a másiknál függetlenül attól, hogy mit választ a másik játékos. Ezért egyik stratégia sem dominálja a másikat, így domináns egyensúly sincs.

Mi lesz a megoldás? Ha Oszlop tanulni fog, Sornak is érdemesebb otthon maradnia. Ha viszont Sor otthon marad, Oszlopnak is érdemes tanulnia. Találtunk tehát egy olyan pontot, amely stabil: egyik játékosnak sem érdemes más stratégiát választania, kilépnie az egyensúlyi pontból. Az ilyen egyensúlyt nevezzük *Nash-egyensúlynak.*

Formálisan: ha létezik egy $(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ stratégiapár, amelyre

$$H_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq H_1(\sigma_1, \sigma_2^*)$$

bármely $\sigma_1 \in \Sigma_1$ stratégiára, és

$$H_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq H_2(\sigma_1^*, \sigma_2)$$

bármely $\sigma_2 \in \Sigma_2$ stratégiára, akkor (σ_1^*, σ_2^*) Nash-egyensúly.

Az egyensúlyt nemcsak kétszemélyes, hanem n-személyes játékokra is definiálhatjuk. Hasonlóan a korábbiakhoz egy n-személyes J játékot adottnak tekintünk, ha adottak a $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_i, \ldots, \Sigma_n$stratégiahalmazok $(i = 1, \ldots, n)$, valamint az ezeken értelmezett $H_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \ldots, H_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \ldots, H_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ hasznosságfüggvények $(\sigma_i \in \Sigma_i)$.

Ha létezik $(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ stratégiapont, amely mellett minden $i = 1, \ldots, n$ szereplőre igaz az, hogy $H_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq H_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*)$ bármely $\sigma_i \in \Sigma_i$ stratégiára, a pontot Nash-egyensúlynak nevezzük.

Míg a domináns egyensúllyal az volt a probléma, hogy a legtöbb játékban nem létezik, a Nash-egyensúly esetén az is gond, hogy nem feltétlenül egyértelmű. A fenti játékban ugyanis könnyen mutathatunk még egy ilyen pontot: ha mindkét játékos koncertre megy.

Kevert stratégiák

A fenti játékokat tovább lehet bővíteni az úgynevezett *kevert* stratégiák bevezetésével, amelyek az egyes játékosok stratégiahalmazait bővítik a stratégiák $\mathbf{p}_i$ eloszlásvektorokkal „súlyozott” változataival ($\sum_{j=1}^{S_i} p_i^j = 1$, $p_i^j \geq 0$, ahol S_i az i-edik játékos stratégiáinak száma a bővítés előtt). Mivel bővítettük a stratégiák halmazát, az azon értelmezett kifizetésfüggvények halmazát is bővítenünk kell: a kevert stratégiákhoz tartozó kifizetések a kifizetésfüggvény eredeti értékeinek a $\mathbf{p}_i$ eloszlásvektorral súlyozott várható értékei lesznek.

A két stratégiás esetben tehát az egyik játékosnak egy kevert stratégiája az, ha p valószínűséggel az egyik, $(1-p)$ valószínűséggel pedig a másik stratégiát választja. A gyakorlatban ez például azt jelentheti, hogy ha egy adott játékot egy pillanatban többször is lejátszanak, p gyakorisággal az egyiket, míg $(1-p)$ gyakorisággal a másikat választja a játékos. Az eddig tárgyalt stratégiákat (amelyek esetén $p = 1$) ezentúl *tiszta* stratégiáknak nevezzük.

Vegyük például a pénzfeldobós játékot, ahol a két játékos egyszerre dob fel egy-egy pénzérmét és megállapodnak, hogy ha azonos oldalra esnek az egyikük nyer, ellenkező esetben viszont a másik. Ezt a játékot az alábbi táblázattal jellemezhetjük (Sor nyer, ha azonosak az oldalak):

		Oszlop			
		Fej		Írás	
Sor	Fej	1	-1	-1	1
	Írás	-1	1	1	-1

A fenti játék zérus összegű. Akárcsak a családi vitának, a pénzfeldobós játéknak sincs domináns egyensúlya. Sőt, a tiszta stratégiák halmazán még Nash-egyensúlya sincs – ezt könnyen ellenőrizhetjük a négy eset végiggondolásával: valamelyik játékosnak mindig érdemes stratégiát váltania, ha feltételezi, hogy a másik játékos nem vált stratégiát. „Stratégiát váltani” itt persze annyit jelent, hogy a másik oldalára esik az érme.

A $p = \dfrac{1}{2}$ kevert stratégia azonban mindkét játékos számára Nash-egyensúly, hiszen ennek a stratégiának a kifizetése a másik játékos bármilyen választása esetén nulla – így ez a stratégia a kölcsönösen legjobb választás mindkettőjük számára.

Nash többek között bebizonyította, hogy ha véges számú játékost és véges számú tiszta stratégiát feltételezünk, akkor létezik Nash-egyensúly a játékban. Az egyensúlyban azonban lehet, hogy kevert stratégiát játszanak a játékosok – előbbi példánkban is ez volt a helyzet.

Egy érdekes alkalmazás

Nemrég „Gesztiméter" címmel egy televíziós vetélkedőt láthattunk az egyik kereskedelmi televízión, amelynek címe műsorvezetőjének, Geszti Péternek nevére utalt (a játék internetes oldala még elérhető a `www.gesztimeter.hu` címen). A játékban olyan kérdéseket tettek fel, melyekre kétféle választ lehetett adni (például: ki írta az Aida című operát: Verdi vagy Puccini?). A játékosoknak azonban nem azt kellett kitalálni, hogy melyik a helyes válasz, hanem kétféle játék volt: az egyikben azok nyertek, akik arra tippeltek, amit többen választottak, a másikban viszont azok, akik arra tippeltek, amit kevesebben választottak. (A játékosok száma páratlan volt, ezért döntetlen nem alakulhatott ki.)

Most és a következőkben feltesszük, hogy minden játékos tudja, hogy az Aidá-t Verdi írta. Mi lehet az egyensúlyi stratégia az egyes esetekben? Írjuk fel először a többségi játékot három játékosra. Szokásos felírásunkat most nem alkalmazhatjuk, ezért felsoroljuk az összes esetet, és ahhoz rendeljük a hasznosságokat (**J1**, **J2**, **J3** jelöli a három játékos stratégiáját, **H1**, **H2** és **H3** pedig a hozzájuk tartozó hasznosságokat):

J1	**J2**	**J3**	**H1**	**H2**	**H3**
Verdi	Verdi	Verdi	1	1	1
Verdi	Verdi	Puccini	1	1	0
Verdi	Puccini	Verdi	1	0	1
Verdi	Puccini	Puccini	0	1	1
Puccini	Verdi	Verdi	0	1	1
Puccini	Verdi	Puccini	1	0	1
Puccini	Puccini	Verdi	1	1	0
Puccini	Puccini	Puccini	1	1	1

Megállapíthatjuk, hogy nincs domináns stratégia. Nash-egyensúly azonban kettő is van a tiszta stratégiák halmazán: ha mindhárman Verdi-t, vagy ha mindhárman Puccini-t választanak. Ellenőrizzük először a váratlan Puccini választást: ha bármely két játékos Puccini-t választ, a harmadiknak nem érdemes Verdi-t választania, hiszen kisebbségbe kerül. Ugyanez igaz a jobban várt három Verdire is – ha bármely két játékos Verdi-t választ, a harmadiknak nem érdemes Puccinit választania, hiszen kisebbségbe kerül.

Matematikai problémákra nem mindig jellemző az, hogy a megoldás helyességét a valóságban is ellenőrizhetjük — itt a televíziós játék miatt lehetőséget kaptunk erre. A játékok során szinte mindig az az egyensúlyi pont alakult ki, ahol mindenki az igaz választ tippelte (esetünkben a három Verdi). A játékosok számára a két egyensúlyi pont közötti választásban mégis szerepet játszott az is, hogy mi a válasz a kérdésre (eddig ezt az információt nem használtuk).

Mi a helyzet a fordított játék esetében, ahol a kisebbséghez tartozók nyertek? Esetükben is felírjuk az egyes stratégiahármasokhoz tartozó hasznosságokat:

J1	**J2**	**J3**	**H1**	**H2**	**H3**
Verdi	Verdi	Verdi	0	0	0
Verdi	Verdi	Puccini	0	0	1
Verdi	Puccini	Verdi	0	1	0
Verdi	Puccini	Puccini	1	0	0
Puccini	Verdi	Verdi	1	0	0
Puccini	Verdi	Puccini	0	1	0
Puccini	Puccini	Verdi	0	0	1
Puccini	Puccini	Puccini	0	0	0

Ebben a játékban sincs domináns egyensúly. Viszont hat Nash-egyensúly is van: amelyben ketten az egyikre, egy valaki pedig a másikra tippel. A kisebbségre tippelőnek nyilván nem érdemes másra tippelnie, hiszen nyertesből vesztessé válna. A többséghez tartozó tippelő pedig hiába áll át a kisebbséghez, azt többséggé változtatja, ezért ismét csak nem tud győztessé válni.

A televíziós játékok során ez az eredmény be is következett: a kérdéstől függetlenül szinte mindig közel fele-fele arányban voltak az egyik és a másik válaszra tippelők.

Ha a problémát általánosítjuk, és a játékosok számát $2k+1$-re növeljük, a többségi játékban továbbra is két Nash-egyensúly marad, amikor mindenki ugyanarra tippel. A kisebbségi játékban minden olyan eset Nash-egyensúly, ahol k játékos az egyikre, $k+1$ játékos pedig a másik válaszra tippel, azaz az egyensúlyok száma igen nagy, $\dfrac{(2k+1)!}{k!(k+1)!}$.

Ajánlott irodalom

Akik a témában mélyebben szeretnének elmélyülni, azoknak javaslom *Szép Jenő – Forgó Ferenc:* Bevezetés a játékelméletbe, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó (1974) című könyvét. A játékelmélet oktatásához hasznos *Filep László:* Játékelmélet, Tankönyvkiadó (1985), *Radnainé Szendrei Julianna:* A játék matematikája, Tankönyvkiadó (1976) vagy *Eső Péter – Rátfai Attila – Világi Balázs:* Nem-kooperatív játékelmélet, BKE (1992) műve. A közgazdasági alkalmazások iránt érdeklődőknek pedig érdemes tanulmányozniuk *Martin J. Osborne – Ariel Rubinstein:* A Course in Game Theory, MIT press (1996) és *Jean Tirole:* Theory of Industrial Organizations, MIT press (1988) című könyveit.

Radnai Márton