## Első nap

**1.** Legyen $n$ pozitív egész szám. Legyen $T$ a sík azon $(x, y)$ pontjainak halmaza, amelyekre $x$ és $y$ nemnegatív egész számok és $x + y < n$. $T$ minden pontját pirosra vagy kékre színezzük. Ha az $(x, y)$ pont színe piros, akkor $T$ minden olyan $(x', y')$ pontjának a színe is piros, amire $x' \le x$ és $y' \le y$ mindegyike teljesül. Nevezzük $X$-halmaznak az olyan halmazokat, amelyek $n$ olyan kék pontból állnak, amelyek $x$-koordinátái mind különbözőek, és nevezzük $Y$-halmaznak az olyan halmazokat, amelyek $n$ olyan kék pontból állnak, amelyek $y$-koordinátái mind különbözőek. Bizonyítsuk be, hogy az $X$-halmazok száma megegyezik az $Y$-halmazok számával.

**2.** Legyen $BC$ az $O$ középpontú $\Gamma$ kör egy átmérője. Legyen $A$ a $\Gamma$ kör egy olyan pontja, amire $0^\circ < AOB\sphericalangle < 120^\circ$. Legyen $D$ a $C$-t nem tartalmazó $AB$ ív középpontja. Az $O$-n keresztül $DA$-val párhuzamosan húzott egyenes messe az $AC$ egyenest a $J$ pontban. $OA$ felezőmerőlegesének és $\Gamma$-nak metszéspontjai legyenek $E$ és $F$. Bizonyítsuk be, hogy $J$ a $CEF$ háromszög beírt körének a középpontja.

**3.** Határozzuk meg az összes olyan $(m, n)$ párt, ahol $m$, $n$ egész számok, amikre $m, n \ge 3$, amelyekhez létezik végtelen sok olyan $a$ pozitív egész szám, amire

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

egész szám.

## Második nap

**4.** Legyen $n$ 1-nél nagyobb egész szám. $n$ összes pozitív osztója $d_1, d_2, \ldots, d_k$, ahol $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Legyen $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$.

$(a)$ Bizonyítsuk be, hogy $D < n^2$.

$(b)$ Határozzuk meg az összes olyan $n$ számot, amire $D$ osztója $n^2$-nek.

**5.** Határozzuk meg az összes olyan $f$ függvényt, ami a valós számok $\mathbf{R}$ halmazát önmagába képezi és amire

$$\big(f(x) + f(z)\big)\big(f(y) + f(t)\big) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

teljesül minden $x, y, z, t \in \mathbf{R}$ esetén.

**6.** Legyenek $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ egységsugarú körök a síkban, ahol $n \ge 3$. Jelölje a középpontjaikat rendre $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Tegyük fel, hogy nincs olyan egyenes, aminek kettőnél több körrel van közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{O_iO_j} \le \frac{(n-1)\pi}{4}.$$