

1. Az  $ABCD$  trapézban az  $A$  és a  $D$  csúcsoknál derékszög van, az  $AC$  és a  $BD$  átlók merőlegesek egymásra és  $4AB = 9CD$ . Határozzuk meg az átlók hosszának az arányát!

**I. megoldás.** Legyenek a trapéz csúcsai  $A(0;0)$ ,  $B(9a;0)$ ,  $C(4a;m)$  és  $D(0;m)$ . Az  $\overrightarrow{AC}(4a;m)$  és  $\overrightarrow{BD}(-9a;m)$  vektorok merőlegesek, skaláris szorzatuk 0, így  $-36a^2 + m^2 = 0$ . Ezt felhasználva:  $\frac{BD^2}{AC^2} = \frac{81a^2 + m^2}{16a^2 + m^2} = \frac{117a^2}{52a^2}$ . Így  $\frac{BD}{AC} = \frac{3}{2}$ .

**II. megoldás.** A  $C$  csúcson át  $BD$ -vel párhuzamosan rajzolt egyenes és  $AB$  metszéspontját jelöljük  $E$ -vel. Az  $AEC$  derékszögű háromszögben a befogótételt fölírva:  $AC^2 = 4a \cdot 13a$ ,  $BD^2 = EC^2 = 9a \cdot 13a$ , amelyekből az előző eredményhez jutunk.

2. Oldjuk meg az

$$\frac{x-14}{2} + \frac{x-12}{4} + \frac{x-10}{6} = \frac{x-8}{8} + \frac{x-6}{10} + \frac{x-4}{12} + \frac{x-16}{p}$$

egyenletet, ahol a  $p$  0-tól különböző valós paraméter.

**Megoldás.** Az egyenlet mindkét oldalából 3-at elvéve:

$$\frac{x-14}{2} - 1 + \frac{x-12}{4} - 1 + \frac{x-10}{6} - 1 = \frac{x-8}{8} - 1 + \frac{x-6}{10} - 1 + \frac{x-4}{12} - 1 + \frac{x-16}{p}.$$

Ebből az

$$(x-16) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{p} \right) = (x-16) \left( \frac{73}{120} - \frac{1}{p} \right) = 0$$

egyenlethez jutunk.  $p = \frac{120}{73}$  esetén végtelen sok megoldás van,  $p \neq \frac{120}{73}$ -ra az  $x = 16$  érték adódik.

3. Írjuk föl annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az  $A(0;9)$  és a  $B(7;2)$  pontokon és érinti az  $x$  tengelyt.

**I. megoldás.** A keresett kör középpontja rajta lesz a szakasz felezőmerőlegesén, az  $x - y = -2$  egyenesen. A középpont így  $(r-2; r)$ .

Ennek az  $A$ -tól való távolsága  $r$ , így a  $B$  koordinátáit helyettesítve

$$(r-2)^2 + (r-9)^2 = r^2.$$

Ebből az  $r = 5$  és  $r = 17$  értékeket kapjuk.

A keresett körök egyenlete:

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25, \quad \text{illetve} \quad (x-15)^2 + (y-17)^2 = 289.$$

**II. megoldás.** Az  $AB$  egyenes egyenlete  $x + y = 9$ , ez az  $x$  tengelyt a  $(9;0)$  pontban metszi. E pontnak a körre vonatkozó hatványa  $2 \cdot \sqrt{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{2} = 36$ . Ebből az  $x$  tengelyen lévő érintési pontok:  $9 - 6 = 3$ , illetve  $9 + 6 = 15$ .

4. Egy gúla alaplappja olyan trapéz, melynek három oldala 6 egység hosszú, a negyedik pedig 12 egységnyi. A gúla oldalélei az alapsíkkal egyenlő szöveget zárnak be. Mekkora ez a szög, ha a test térfogata 162 térfogategység?

**Megoldás.** Legyen az alaplapon  $AB = 12$ ,  $BC = CD = DA = 6$ , az alaplapon kívüli csúcs  $E$ . Húzzunk párhuzamosan a  $C$  csúcson át  $AD$ -vel, ennek  $AB$ -vel való metszéspontja legyen  $T$ . Az  $ATCD$  négyszög rombusz, tehát a trapéz három egybevágó szabályos háromszögből áll, melyek oldala 6 egység. Az  $E$  pont vetülete az alapsíkon legyen  $K$ . Ekkor a  $KAE$  és  $KBE$ , illetve a  $KCE$  és  $KDE$  háromszögek egybevágóak, így  $K$  a trapéz köré írt kör középpontja, tehát azonos  $T$ -vel.

A trapéz területe  $27\sqrt{3}$ , így  $\frac{27\sqrt{3} \cdot m}{3} = 162$ -ből a test  $m$  magassága  $6\sqrt{3}$ . A keresett szög hegyes, értéke így  $60^\circ$ .

5. Egy háromszög egyik oldalát a szemben fekvő szög harmadoló egyenesei 5, 6 és 9 egységnyi szakaszokra bontják. Határozzuk meg az ezzel az oldallal szembeni szög koszinuszának pontos értékét.

**Megoldás.** Ha az  $A$  csúcsból induló szögharmadoló egyenesek a  $BC$  oldalt a  $D$  és  $E$  pontokban metszik, akkor a szögfelezőtétel miatt  $AB = 5x$ ,  $AD = 2y$ ,  $AE = 6x$  és  $AC = 3y$ . Az  $ABE$  háromszög területét kétféleképpen felírva az

$$\frac{5x \cdot 2y \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{2y \cdot 6x \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{5x \cdot 6x \cdot \sin 2\alpha}{2}$$

egyenlethez jutunk. Ebből  $11y = 30x \cdot \cos \alpha$ .

Az  $ADC$  háromszög területéből hasonló módon a  $15x = 6y \cdot \cos \alpha$  összefüggéshez jutunk. Ebből  $\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{75}{11}}$ , majd  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{11}{12}}$ . A  $\cos 3\alpha$ -ra a  $\frac{\sqrt{33}}{9}$  értéket kapjuk.

6. Adjuk meg a

$$2 \sin \frac{2002^{100} \cdot \pi}{-3} \cdot 5^{\frac{1}{\log_3 25}} = |\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 4|$$

egyenlet legkisebb pozitív megoldását!

**Megoldás.** Mivel 2002 páros és 3-mal osztva 1 maradékot ad, azért  $2002^{100}$  is ilyen. Így  $2002^{100}$  6-tal osztva 4 maradékot ad. Ezért

$$2 \sin \left( -2002^{100} \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \left( -\frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$$
$$5^{\frac{1}{\log_3 25}} = 5^{\log_{25} 3} = 25^{\frac{1}{2} \log_{25} 3} = \sqrt{3}.$$

Így az egyenlet bal oldalának az értéke 3. A jobb oldal  $||x - 1| - 4|$  alakban írható, a 3 értéket négy helyen veszi föl. Közülük a legkisebb pozitív a 2, ez a megoldás.

7. Milyen  $p$  és  $q$  pozitív prímpárookra lesz a

$$(p^2 - pq - 2q^2)x^2 - 3q^2x - (2p + 0,5) = 0$$

egyenletnek egy valós gyöke?

**Megoldás.**  $p^2 - pq - 2q^2 = 0$  esetén  $(p - 2q)(p + q) = 0$ . A  $p = 2q$  és  $p + q = 0$  esetek nem adnak megoldást.  $p^2 - pq - 2q^2 \neq 0$  fennállásakor  $D = 0$  szükséges.

$$D = 9q^4 + 4(2p + 0,5)(p^2 - pq - 2q^2) = 9q^4 + 2(4p + 1)(p^2 - pq - 2q^2) = 0$$

A bal oldal második tagja páros, így  $q = 2$  lehet csak. Ezt beírva:

$$9 \cdot 2^4 + 2(4p + 1)(p^2 - 2p - 8) = 0, \quad -4p^3 - 7p^2 - 34p + 64 = 0.$$

Ha egyenlőség van, akkor a bal oldal egyetlen páratlan együtthatójú tagja,  $-7p^2$  is páros, így csak  $p = 2$  lehetséges és ez valóban megoldás.

8. Mely valós számokra értelmezhető a

$$\sqrt{\frac{2^{-x+1} - 0,5}{\log_x(x^2 + x)}}$$

kifejezés?

**Megoldás.**  $\frac{2^{-x+1} - 0,5}{\log_x(x^2 + x)} \geq 0$  szükséges. A számláló nemnegatív és a nevező pozitív, az alap 1-nél nagyobb esetből

az  $1 < x \leq 2$ -t kapjuk. A számláló nemnegatív és a nevező pozitív, 1-nél kisebb alap esetén a  $0 < x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  intervallum adódik.

A számláló nempozitív, a nevező negatív esetekből nem kapunk megoldást.