Ágoston György egyetemi tanár (pedagógia) tiszteletére

Rábai Imre

1. Az (a_n) sorozat tagjai azok a pozitív egész számok, amelyek 8-cal osztva 5-öt adnak maradékul, a (b_n) sorozat tagjai azok a pozitív egész számok, amelyek 6-tal osztva 1-et adnak maradékul. Jelöljük S_n-nel és T_n-nel az (a_n), illetve (b_n) sorozat első n tagjának összegét.

a) Mekkora n, ha $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{25}{16}$?

b) Melyik az a legkisebb n, amelyre $S_n - T_n > 1000$?

2. Az A, illetve a B pont helyvektora $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Az OA szakasz O-hoz közelebbi harmadoló pontja D, az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontja E, a BD és OE egyenesek metszéspontja P. Fejezzük ki $\mathbf{a}$-val és $\mathbf{b}$-vel az $\overrightarrow{OP}$ és a $\overrightarrow{PD}$ vektorokat.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:
3
a) $\sqrt{1-4x+4x^2} + 2x - 1 = 0$; b) $x^{\log_3 x} = \sqrt[9]{81}$; c) $\sin 2x + 7\cos 2x = 1$.

4. Tekintsük azt a szabályos négyoldalú gúlát, amelynek minden éle egyenlő, és a beírható gömb sugara $\varrho = 1$ egység. Számítsuk
ki a gúla éleinek a hosszát.

5. Az ABC háromszögben az A csúcsnál levő szög a B csúcsnál levő szög kétszerese, továbbá $6AB = 5BC$, és a háromszög területének mérőszáma az A csúcsnál levő szög szinuszának 62,5-szerese. Számítsuk ki a háromszög oldalait.

6. Írjuk fel annak a $P(-1;-1)$ ponton áthaladó körnek az egyenletét, amely érinti az $x+2y-6=0$ és a $2x-y+3=0$ egyenletű egyeneseket.

7. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán, ahol a valós paraméter:
3
a) $(a+2)\cdot y + \dfrac{a}{y-2} = 4a+6$; b) $(a+2)\cdot 3^x + \dfrac{a}{3^x-2} = 4a+6$.

8. Melyek azok a valós számokból álló számpárok, amelyek kielégítik az

$$x^{\sqrt{\log_x y}} = y^{\sqrt{\log_y x}}$$

kétismeretlenes egyenletet?