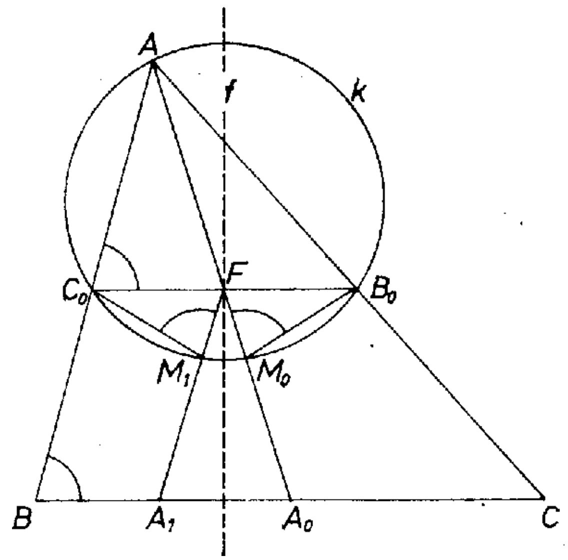
Jelöljük a BC, B_0C_0 szakaszok felezőpontját A_0-lal, F-fel, az utóbbi felező merőlegesét f-fel, az AB_0C_0 háromszög köré írt kört k-val. Az AF egyenes k-t másodszor F-en túli darabján metszi, ezt a metszéspontot jelöljük M_0-lal, M_0-nak f-re vonatkozó tükörképét (ami szintén k-n van) M_1-gyel. Az AA_0A_1 háromszögben A_1-nél derékszög van, F az AA_0 átfogó felezőpontja, f tehát az A_0A_1 szakasznak is felező merőlegese, így M_1 rajta van az A_1F egyenesen. Megmutatjuk, hogy M_1 az A_1B_0C háromszög köré írt körön is, az A_1C_0B háromszög köré írt körön is rajta van, ezzel feladatunknak mindkét állítását belátjuk.

Mivel B és C szerepe eddig még szimmetrikus volt, elég belátnunk például, hogy a B, A_1, C_0, M_1 pontok egy körön vannak. A k körben az M_0, C_0 pontok az AB_0 húrnak ugyanazon az oldalán vannak, ezért belőlük ez a húr egyenlő szögek alatt látszik:

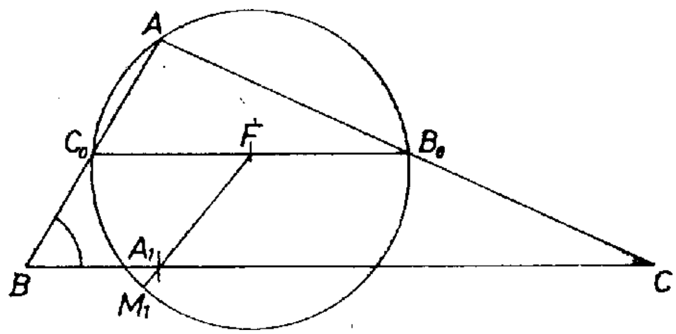
$$AC_0B_0\sphericalangle = AM_0B_0\sphericalangle.$$

Itt az első egyenlő az ABC szöggel, a második a C_0M_1F szöggel.



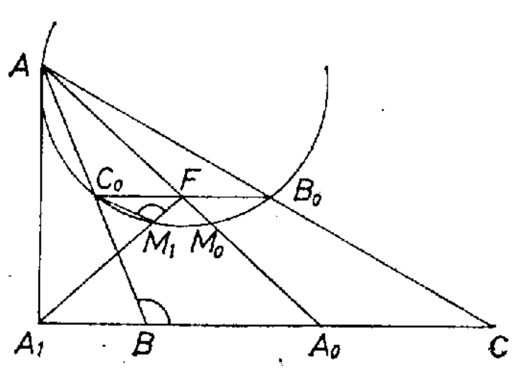
1. ábra

Ha tehát ABC hegyesszögű háromszög (1. ábra), készen is vagyunk, hiszen ekkor A_1 a BC, M_1 pedig az A_1F szakaszon van, és C_0M_1F épp a konvex $BA_1M_1C_0$ négyszög B-vel szemközi csúcsánál levő külső szöge.



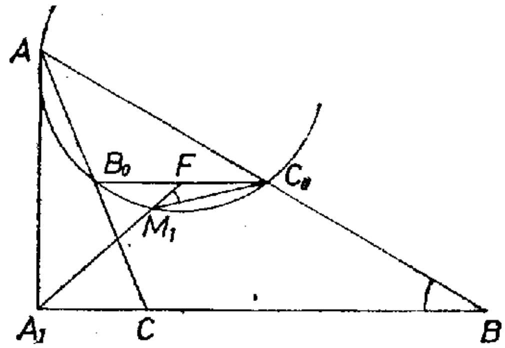
2. ábra

Ha az ABC háromszögben A-nál $90°$-os, vagy annál nagyobb szög van (2. ábra), M_1 azonos A_1-gyel, vagy A_1F-nek A_1-en túli meghosszabbításán van, és A_1 továbbra is a BC szakaszon van. Ekkor tehát B és M_1 az A_1C_0 egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, és belőlük az A_1C_0 szakasz egyenlő szögek alatt látszik.



3. ábra

Ugyanez igaz, ha a B-nél levő szög nagyobb $90°$-nál (3. ábra), csak most azért, mert ezek a szögek az ABC, C_0M_1F szögek mellékszögei. (Ha $ABC\sphericalangle = 90°$, A_1 azonos B-vel, állításunk nyilvánvaló.)



4. ábra

Végül, ha $ACB\sphericalangle \geqq 90°$, a $BA_1M_1C_0$ négyszög pontosan azért húrnégyszög, mint az első esetben (4. ábra).

Megjegyzés. Elkerülhettük volna a négy eset külön vizsgálatát a forgásszögek felhasználásával. Azért választottuk most mégis az esetek szétválasztását, hogy megmutassuk, bizonyításunk alapgondolata olyan egyszerű, hogy még az összes eset sorravétele sem nagy munka mellette.