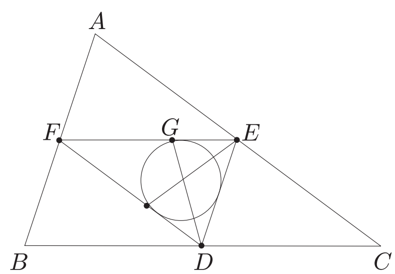
A háromszögeket fizikai értelemben (a tömegeloszlásuk különbözősége alapján) három csoportra oszthatjuk. *Nulldimenziós* háromszögnek nevezhetjük azokat, amelyeket három – nem egy egyenesbe eső – pontszerű, véges tömeggel rendelkező test jelöl ki. Az *egydimenziós* háromszöget három vékony, de tömeggel rendelkező (homogén tömegeloszlású) rúd alkotja. Végül *kétdimenziós* háromszögnek a vékony, de tömeggel rendelkező, (homogén tömegeloszlású) háromszög alakú lemezt nevezhetjük. Bármelyik típusú háromszöget tekintjük is, ha az a Föld felszínén helyezkedik el és a mérete a Föld sugarához képest kicsi, akkor a súlypontja azonosnak tekinthető a tömegközéppontjával.

A geometriában egy háromszög súlypontja minden esetben a három súlyvonalának metszéspontja. Fizikai értelemben a súlypont már nem ilyen egyértelmű: helye függ attól, hogy hány „dimenziós" háromszögről van szó.

A nulldimenziós háromszög súlypontjának helye úgy határozható meg, hogy először két tömegpont súlypontját keressük meg (ez a két pontot összekötő egyenest a tömegekkel fordított arányban osztja két részre); ezután ebbe a pontba képzelve a két pont tömegének összegét képviselő új pontot, ennek és a harmadik pontnak a közös súlypontját határozzuk meg. Ilyen esetben – a tömegek nagyságától függően – a háromszög fizikai súlypontja bárhova kerülhet azon a területen belül, amelyet a három tömegpont mint geometriai háromszög határoz meg. A fizikai súlypont csak akkor esik egybe a három pont által meghatározott háromszög geometriai súlypontjával, ha a három pont tömege egyenlő.

Hasonlóan egyszerű a kétdimenziós háromszög, vagyis a háromszög alakú (homogén) lap súlypontjának meghatározása. Az eljárás (a háromszöglapnak gondolatban vékony csíkokra való vagdosása) megtalálható például a közkedvelt „Holics Fizikában" is, az I. kötet 2.2.3.2. pontjában, ezért itt nem foglalkozunk vele. A súlypont fizikai helyéül ez esetben is visszakapjuk a geometriai háromszög súlyvonalainak metszéspontját, vagyis a háromszög geometriai súlypontját.

Nem ilyen egyszerű azonban a vékony lécekből alkotott egydimenziós háromszög fizikai súlypontjának meghatározása. Minthogy a fizikában, a fizikai gyakorló- és versenyfeladatokban gyakran előfordul a vékony rudakból, lécekből vagy huzalokból készített háromszög (lásd pl. a 2000/2001. tanévi OKTV I. fordulóját), a következőkben ezt a problémát vizsgáljuk meg.



1. ábra

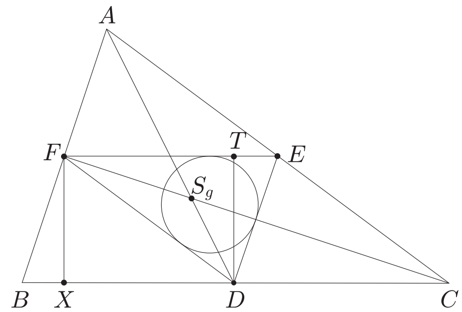
Tekintsünk egy egyenletes keresztmetszetű, homogén tömegeloszlású, azonos sűrűségű vékony rudakból álló háromszöget. Az oldalak hossza – az *1. ábra* jelöléseivel – legyen $BC = a$, $CA = b$ és $AB = c$ $(a \geq b \geq c)$. A tömegközéppont megkeresését a nulldimenziós háromszög esetére vezetjük vissza. Az egyes oldalak (rudak) tömegközéppontja a felezőpontjukban van, a hozzájuk rendelt tömeg pedig az oldal hosszúságával arányos. Ennek megfelelően a D pontba $k \cdot a$, az E pontba $k \cdot b$, az F pontba pedig $k \cdot c$ nagyságú tömeget képzelhetünk, ezen három tömegpont tömegközéppontja ugyanott van, mint az eredeti egydimenziós háromszögé. Az E pontbeli és az F pontbeli tömegek tömegközéppontja, a G pont az EF szakaszt a tömegekkel fordított arányban osztja, vagyis

$$\frac{GF}{GE} = \frac{k \cdot b}{k \cdot c}.$$

Ennek az aránypárnak a jobb oldalát írhatjuk $\frac{b}{2} : \frac{c}{2}$ alakban is, ami azt jelenti, hogy G az EF oldalt olyan arányban osztja ketté, ahogyan a DEF háromszög DF oldalának hossza aránylik DE oldalának hosszához. Ez nem más, mint a szögfelező-tételben szereplő arány; a DG egyenes tehát a DEF háromszög D csúcsára illeszkedő belső szög szögfelezője.

A nulldimenziós DEF háromszög tömegközéppontja tehát ezen a DG szögfelezőn található. Minthogy a nulldimenziós háromszög tömegközéppontjának megkeresését kezdhettük volna például a D és F pontokba képzelt $k \cdot a$, illetve $k \cdot c$ tömegek közös tömegközéppontjának meghatározásával is, és kaptuk volna, hogy az a DF oldalt $\frac{a}{2} : \frac{c}{2}$ arányban osztja, azaz rajta volna a DEF háromszög E pontra illeszkedő belső szögfelezőjén, azt kell megállapítanunk, hogy a (megfelelő nagyságú tömegekkel rendelkező) nulldimenziós DEF háromszög tömegközéppontja a háromszög belső szögfelezőinek közös pontja kell legyen. Geometriából ismerjük, hogy ilyen pont csak egy van, és az a DEF háromszögbe írható kör középpontja.

Az egydimenziós háromszög súlypontja tehát nem a geometriában értelmezett súlypont, vagyis nem a háromszög súlyvonalainak metszéspontja, hanem a háromszög oldalfelező pontjai által meghatározott háromszögbe írható kör középpontja.



2. ábra

A geometriából azt is ismerjük, hogy a háromszög súlypontja a három oldal közül a leghosszabb oldalhoz van a legközelebb. Belátható, hogy az egydimenziós háromszög súlypontja is a leghosszabb oldalhoz van a legközelebb. A továbbiakban kimutatjuk, hogy *az egydimenziós háromszög súlypontja közelebb van a leghosszabb oldalhoz (ha van a háromszögnek leghosszabb oldala), mint a háromszög súlyvonalainak metszéspontja, vagyis a geometriailag értelmezett súlypont, és a két távolság csak a szabályos háromszögben egyezik meg.*

Tekintsük a *2. ábrát,* amelyen az ABC háromszög két súlyvonalát (AD, illetve CF) és a geometriában értelmezett S_g súlypontját, valamint az oldalfelező pontjai által meghatározott DEF háromszögének a leghosszabb oldalhoz tartozó $DT = FX$ magasságát is ábrázoltuk. Mint azt a matematikából ismerjük, a DEF háromszög beírható körének sugara $r = t/s$, ahol t a háromszög területe, azaz

$$t = \frac{\frac{a}{2} \cdot DT}{2} = \frac{a \cdot DT}{4}$$

amelyben DT az $EF = \frac{a}{2}$ hosszúságú, leghosszabb oldalhoz tartozó magasság, s pedig a DEF háromszög félkerülete:

$$s = \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}}{2} = \frac{a+b+c}{4}.$$

Láttuk, hogy az eredeti egydimenziós ABC háromszög tömegközéppontja a háromszög leghosszabb BC oldalától $DT - r$ távolságban van. Súlyvonalainak metszéspontja ugyanezen oldaltól $\frac{2}{3} \cdot XF = \frac{2}{3} \cdot DT$ távolságra van, mert a súlyvonalak harmadolják egymást. Azt állítjuk tehát, hogy $DT - r \leq \frac{2}{3} \cdot DT$. Ennek igazolására írjuk be az egyenlőtlenség bal oldalába az előzőekben már felírt

$$r = \frac{t}{s} = \frac{a \cdot DT}{a+b+c}$$

kifejezést. Egyszerűsítve DT-vel, amely nem lehet nulla, egyenlőtlenségünk a következő alakot ölti: $1 - \frac{a}{a+b+c} \leq \frac{2}{3}$. Minthogy a háromszög oldalai közül a a legnagyobb, az egyenlőtlenség bal oldalának értéke valóban legfeljebb $2/3$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = b = c$, vagyis ha a háromszög szabályos. Ezzel igazoltuk állításunkat.

Hasonló módon igazolható, hogy az egydimenziós háromszög tömegközéppontja a legrövidebb c oldaltól messzebb van, mint a geometriai súlypont és ugyanezen oldal távolsága. A középső hosszúságú b oldaltól az egydimenziós háromszög súlypontja lehet közelebb is és lehet távolabb is, mint a geometriai súlypont, sőt, a két távolság éppen egybe is eshet, ha fennáll a $b = (a+b)/2$ összefüggés. Ez az eset fordult elő az idézett OKTV. I. fordulójában, a II. kategória 4. feladatánál, amely így szólt:

Az a, b, c oldalhosszúságú derékszögű háromszög oldalai azonos anyagú vékony rudakból állnak, amelyek mereven kapcsolódnak egymáshoz. A b oldalával vízszintes felületre illeszkedő függőleges síkú háromszög labilis egyensúlyi helyzetéből eldől.

a) Mekkora sebességgel éri el a B csúcs a vízszintes felületet, ha a dőlés közben a háromszög nem csúszik meg. (A b oldal súrlódásmentes csuklóval van rögzítve.)

b) Hol és mekkora sebességgel érkezne a B csúcs a vízszintes felülethez, ha a b oldal szabadon csúszhatna, és minden súrlódás elhanyagolható lenne? ($a = 30$ cm, $c = 50$ cm.)

A megoldás során több versenyző a háromszög súlypontját automatikusan, minden kisérő megjegyzés nélkül (a cikkben leírtak szerint elvileg hibásan!) ott vette fel, ahol a geometriailag értelmezett súlypont van, vagyis a súlyvonalak metszéspontjában. Ez a pont a $b = 40$ cm-es oldaltól 10 cm távolságra van. A háromszög fizikai értelemben vett igazi súlypontja nem esik egybe a súlyvonalak metszéspontjával, de az is éppen 10 cm távolságra van a b oldaltól, így ez az elvi hiba a további számítások eredményét nem rontotta el. A véletlen egybeesés azért fordult elő, mert a megadott adatokkal b éppen a másik két oldal számtani közepével egyezett meg. Ha a háromszög a leghosszabb, $c = 50$ cm-es oldalával illeszkedett volna a síkra, akkor a kétféle súlypont összekeverése numerikusan is észrevehető hibát okozott volna (a helyes 7 cm helyett 8 cm-rel számoltak volna).

Érdekes feladat lehet a különböző „dimenziójú" háromszögek mintájára a négy tömegpontból álló nulldimenziós, rudakból összerakott egydimenziós, vékony lemezekből készített kétdimenziós és végül a tömör, háromdimenziós tetraéder súlypontjának megkeresése; ennek a problémának a tanulmányozását azonban az Olvasóra hagyjuk.