1. *Egy téglalap oldalai* 15,6 *és* 18 *egység hosszúak. Írjunk a téglalapba olyan téglalapot, amelynek egyik oldala a másik oldal háromszorosa és az adott téglalap minden oldalára pontosan egy csúcsa illeszkedik a beírt téglalapnak. Mekkorák a beírt téglalap oldalai?*

Megoldás. Legyen a beírt téglalap rövidebb oldala a, ekkor a másik oldal $3a$. A beírt téglalap oldalai 2-2 egybevágó háromszöget vágnak le, amelyek átfogói a illetve $3a$ egység. Ezek a háromszögek egymáshoz hasonlók. Így ha a kisebb háromszög befogói x és y, akkor a nagyobbaké $3x$ és $3y$. Az eredeti téglalap oldalait x-szel és y-nal kifejezhetjük: $x+3y=15{,}6$ és $3x+y=18$, ahonnan $x=3{,}6$ és $y=4{,}8$ és $a^2=3{,}6^2+4{,}8^2$, $a^2=36$, $a=6$. A beírt téglalap oldalai 6 és 18 egység hosszúak.

2. *a) Igazoljuk, hogy minden háromszögben* $\operatorname{ctg}\alpha\sin\gamma+\cos\gamma=\dfrac{b}{a}$, *ahol* α *az* a, γ *a* c *oldallal szemközti szög.*
b) Egy háromszögben $b=2a$ *és* $\gamma=60^\circ$. *Számítsuk ki a háromszög másik két szögét!*

Megoldás. *a)* Vegyük figyelembe, hogy

$$\sin\beta=\sin\left(180^\circ-(\alpha+\gamma)\right)=\sin(\alpha+\gamma),$$

és alkalmazzuk a szinusztételt:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha}=\cos\gamma+\operatorname{ctg}\alpha\sin\gamma.$$

b) Most $\dfrac{b}{a}=2$, $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$, $\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt3}{2}$, így $2=\dfrac12+\dfrac{\sqrt3}{2}\operatorname{ctg}\alpha$, ahonnan $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt3$, $\alpha=30^\circ$ és így $\beta=90^\circ$.

3. *Az* (a_n) *mértani sorozat tagjaira* $a_1+a_3+a_5=133$ *és* $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_5}=\dfrac{133}{1296}$. *Írjuk fel a sorozat első öt tagját!*

Megoldás. A feltételek szerint

$$a_1+a_1q^2+a_1q^4=133 \quad \text{és} \quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1q^2}+\frac{1}{a_1q^4}=\frac{133}{1296}.$$

Ez utóbbi egyenletből az első egyenlet felhasználásával

$$\frac{a_1(q^4+q^2+1)}{a_1(a_1q^4)}=\frac{133}{1296},\qquad (a_1q^2)^2=36^2.$$

Ha $a_1q^2=36$, akkor az első egyenletből $36q^4-97q^2+36=0$, ha $a_1q^2=-36$, akkor hasonlóan $36q^4+169q^2+36=0$. Az első esetben $q^2=\left(\dfrac32\right)^2$, $a_1=16$, így az első öt tag 16, 24, 36, 54, 81 vagy 16, -24, 36, -54, 81, a második esetben $q^2=\left(\dfrac23\right)^2$, $a_1=81$, így az első öt tag 81, 54, 36, 24, 16 vagy 81, -54, 36, -24, 16.

4. *Egy bankba* 3 *évre elhelyeztünk* 40 000 *forintot kamatos kamatra. Az első évben a bank* 10%-*os kamatot számolt el, a második évben a kamatlábat* p%-*kal növelte, a harmadik évben újabb* p%-*kal növelte. Ily módon a harmadik év végén* 2939,20 Ft-*tal többet fizettek ki, mint amennyit a három éven át a* 10%-*os kamatláb mellett kellett volna. Számítsuk ki* p *értékét!*

Megoldás. A feltételek szerint

$$40\,000\cdot 1{,}1\cdot\left(1+\frac{10+p}{100}\right)\left(1+\frac{10+2p}{100}\right)=40\,000\cdot 1{,}1^3+2939{,}20.$$

Innen

$$\left(1{,}1+\frac{p}{100}\right)\left(1{,}1+\frac{2p}{100}\right)=1{,}2768.$$

Legyen $\dfrac{p}{100}=z$, ekkor $2z^2+3{,}3z-0{,}0668=0$. Mivel $z>0$, ezért $z=0{,}02=\dfrac{2}{100}$, tehát $p=2$.

5. *Az* (x,y) *síkbeli* $ABCD$ *négyszög* A *csúcsa az origóban van,* B *csúcsa az* y *tengelyen,* C *csúcsa az első síknegyedben,* D *csúcsa az* x *tengely pozitív felén helyezkedik el. A* BC *oldal egyenesének egyenlete:* $2x+y=12$. *A* CD *oldal merőleges a* BC *oldalra. A négyszög területe* 31 *területegység. Határozzuk meg a* B, C *és* D *csúcspontok koordinátáit!*

Megoldás. A B pont koordinátái $B(0;12)$. Legyen a D pont első koordinátája d, azaz $D(d;0)$. A CD egyenes egyenlete $x-2y=d$. A BC és CD egyenesek C metszéspontja koordinátái d-vel kifejezve $x=\dfrac15(24+d)$, $y=\dfrac25(6-d)$. Mivel C az első síknegyedben van, $d<6$. Legyen E a BC egyenes és az x tengely metszéspontja, ekkor $E(6;0)$.

A BAD háromszög területe 36 területegység, a CDE háromszög területe d-vel kifejezve $\frac{1}{2}(6-d)\cdot\frac{2}{5}(6-d)$. Így

$$36 = 31 + \frac{1}{5}(d-6)^2, \quad (d-6)^2 = 5^2,$$

ahonnan $d = 1$ vagy $d = 11$. Most csak a $d = 1$ lehetséges, hiszen $d < 6$. Ha $d = 1$, akkor $D(1;0)$ és $C(5;2)$.

6. *Egy forgáscsonkakúp alap-, illetve fedőkörének sugara R illetve r ($R > r$). Egy, az alapokkal párhuzamos sík két olyan részre osztja a csonkakúpot, hogy a nagyobb sugarú résznél keletkező csonkakúp térfogata harmada az eredeti csonkakúp térfogatának. Fejezzük ki R-rel és r-rel a síkmetszet sugarát!*

Megoldás. Legyen a csonkakúp térfogata $3V$, a kiegészítő kúp térfogata V_1, a kimetszett kör sugara x.
A hasonló testek térfogatának aránya egyenlő a megfelelő szakaszok köbének arányával. Ezért

$$\frac{V_1+3V}{V_1} = \frac{R^3}{r^3} \quad \text{és} \quad \frac{V_1+2V}{V_1} = \frac{x^3}{r^3},$$

$$1 + 3\cdot\frac{V}{V_1} = \frac{R^3}{r^3} \quad \text{és} \quad 1 + 2\cdot\frac{V}{V_1} = \frac{x^3}{r^3}.$$

Az egyenlő együtthatók módszerével $\frac{V}{V_1}$ kiküszöbölhető: $1 = \frac{3x^2 - 2R^3}{r^3}$, ahonnan a kimetszett kör sugara

$$x = \sqrt[3]{\frac{r^3 + 2R^3}{3}}.$$

7. *Igazoljuk, hogy a $\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right)\cdot\cos 4x = 2$ egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.*

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát 2-vel osztva

$$\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\cdot\cos 4x = 1.$$

Mivel $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ és $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, ezért az egyenlet:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos 4x = 1.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 1$ és $\cos 4x = 1$ vagy $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -1$ és $\cos 4x = -1$, tehát

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{és} \quad 4x = 2n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

vagy

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{és} \quad 4x = \pi + 2n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Innen $6x = 5\pi + 12k\pi$ és $6x = 3n\pi$ vagy $12x = 22\pi + 24k\pi$ és $12x = 3\pi + 6k\pi$, azaz $3n - 12k = 5$ vagy $6n - 24k = 19$, ahol k és n egészek.

Ezek az egyenletek egyetlen (n,k) egész számokból álló számpárra sem teljesülnek, hiszen az első esetben a bal oldal osztható 3-mal, a jobb oldal nem, a második esetben a bal oldal páros, a jobb oldal páratlan, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

8. *Tekintsük a $4^x + 2(n+1)\cdot 2^x + n^2 = 8$ egyenletet, ahol az n paraméter egész szám ($n \in \mathbb{Z}$).*
a) Milyen n esetén van az egyenletnek két különböző megoldása a valós számok halmazán?
b) Milyen n esetén van az egyenletnek pontosan egy megoldása?
Adjuk meg a lehetséges gyökök értékét is!

Megoldás. *a)* A 2^x-re másodfokú egyenletnek akkor van két különböző megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa pozitív, és mindkét megoldás pozitív, hiszen $2^x > 0$.

$$D = 4(n+1)^2 - 4(n^2-8) \equiv 4(2n+9) > 0, \quad n > -\frac{9}{2}.$$

Ha $D > 0$, akkor a másodfokú egyenlet két gyöke pontosan akkor pozitív, ha összegük is és szorzatuk is pozitív: $-2(n+1) > 0$ és $n^2 - 8 > 0$. Ezek együtt akkor teljesülnek, ha $-\frac{9}{2} < n < -\sqrt{8}$, ezért $n = -4$ vagy $n = -3$.

Ha $n=-4$, akkor $4^x-6\cdot 2^x+8=0$, $2^x=4$ vagy $2^x=2$, $x_1=2$, $x_2=1$.

Ha $n=-3$, akkor $4^x-4\cdot 2^x+1=0$, $2^x=2+\sqrt{3}$ vagy $2^x=2-\sqrt{3}$, $x_3=\log_2\left(2+\sqrt{3}\right)$, $x_4=\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)$.

b) Pontosan egy megoldás akkor van, ha $D=0$ és $2^x>0$, vagy $D>0$ és 2^x egyik értéke pozitív, a másik negatív, a szorzatuk, n^2-8 tehát negatív. Az első eset nem lehetséges, hiszen $D=0$ akkor teljesül, ha $n=-\dfrac{9}{2}$, ami nem egész.

Ha $D>0$, azaz $-\dfrac{9}{2}<n$ és $n^2-8<0$, akkor $-\sqrt{8}<n<\sqrt{8}$, azaz $n=-2$, $n=-1$, $n=0$, $n=1$ vagy $n=2$.

Ha $n=-2$, akkor $2^x=1+\sqrt{5}$, $x_6=\log_2\left(1+\sqrt{5}\right)$; ha $n=-1$, akkor $2^x=\sqrt{2}$, $x_7=\log_2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$; ha $n=0$, akkor $2^x=2$, $x_8=1$; ha $n=1$, akkor $2^x=-2+\sqrt{11}$, $x_9=\log_2\left(-2+\sqrt{11}\right)$ végül ha $n=2$, akkor $2^x=-3+\sqrt{13}$, $x_{10}=\log_2(-3+13)$.