Az $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2$ kifejezéssel nagyon sok kombinatorikai feladatban (és számos más helyen) találkozhatunk, és nemegyszer szükség van arra, hogy a nagyságát az n néhány egyszerűbb kifejezésének a segítségével meg tudjuk becsülni. Ezt a célt szolgálja az ún. *Stirling-formula,* amiről éppen a KöMaL előző havi számában lehetett olvasni.[1] Ennek a formulának a bizonyításához a valós analízis számos olyan módszerére van szükség, amely a középiskolás matematikán messze túlmutat. Sokszor megfelel azonban valamivel enyhébb becslés is; megmutatjuk, hogy például a minden n-re fennálló

$$\frac{e}{\sqrt{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n} < n! < e\sqrt{2}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n} \tag{1}$$

egyenlőtlenség belátása a sorozatok határértékének fogalmán kívül semmi egyéb analízisbeli eszközt nem igényel.

Kezdjük mindjárt az (1)-ben előforduló e számnak, a természetes logaritmus alapszámának a bemutatásával. Ez a szám a

$$d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{és az} \quad f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

sorozatok közös határártéke. A határértékek létezéséhez belátjuk, hogy (d_n) szigorúan monoton növő, (f_n) szigorúan monoton fogyó sorozat, $d_n < f_n$ és $f_n - d_n$ a nullához tart. Az első három tulajdonságból következik, hogy mindkét sorozatnak létezik határértéke, és miután a két sorozat különbsége 0-hoz tart, ez a két határérték megegyezik.

A $d_n < f_n$ egyenlőtlenség nyilvánvaló. A (d_n) sorozat monotonitása azt jelenti, hogy minden n pozitív egészre

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \text{azaz} \quad \sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{n+2}{n+1}.$$

Ez pedig valóban teljesül a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség miatt, hiszen az $1, \left(1+\frac{1}{n}\right), \left(1+\frac{1}{n}\right), \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)$ számok számtani közepe éppen $\dfrac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$. Hasonlóan igazolható az is, hogy az (f_n) sorozat fogyó:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \text{azaz} \quad \sqrt[n+1]{1\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} < \frac{n}{n+1},$$

mivel $1, \dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n-1}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}$ számtani közepe $\dfrac{1+n\cdot\frac{n-1}{n}}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$. Ezzel beláttuk, hogy a monoton növő (d_n) sorozat felülről korlátos, hiszen (minden n-re) $d_n < f_n < f_1 = 4$; ezért létezik határértéke. A monoton fogyó (f_n) sorozat pedig alulról korlátos: $f_n > d_n > d_1 = 2$, így az (f_n) sorozatnak is létezik határértéke. Mivel mindkét sorozat korlátos, és a hányadosuk: $\dfrac{f_n}{d_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ az 1-hez tart, azért $f_n - d_n$ a 0-hoz tart, és a két sorozat határértéke ugyanaz az e szám, amire nyilván

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

teljesül.

Vizsgálódásunkat egy újabb sorozattal folytatva azt mutatjuk meg, hogy

$$\text{az} \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right) \quad \text{sorozat szigorúan monoton fogy.} \tag{2}$$

Írjuk a bizonyítandó

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2(n-1)}\right) > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

egyenlőtlenséget

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{2n+1}{2n-1} = 1+\frac{2}{2n-1}$$

alakba. Az $\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n$ hatvány a binomiális tétel szerint $n+1$ darab pozitív tagnak az összege; ezt nyilván nem növeljük ($n \geq 2$), ha csupán az összeg első három tagját írjuk ki:

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n^2-1} + \binom{n}{2}\frac{1}{(n^2-1)^2} =$$

$$= 1 + \frac{2n^2+3n}{2n^3+2n^2-2n-2} > 1 + \frac{2}{2n-1}.$$

[1]Lóczi Lajos: *A faktoriális alsó és felső becslései,* KöMaL 2002/4. szám, 195. old.

Az utóbbi egyenlőtlenséget átrendezve

$$4n^3 + 4n^2 - 3n > 4n^3 + 4n^2 - 4n - 4,$$

ami nyilván igaz.

Tudjuk, hogy a (d_n) sorozat határértéke e, ezért az $a_n = d_n\left(1+\frac{1}{2n}\right)$ határértéke is e. Mivel ez a sorozat szigorúan monoton fogyó, azért a sorozat minden tagja nagyobb e-nél; így

(3) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right) > e, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \frac{2n}{2n+1}.$$

Tekintsük ezután a $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$ sorozatot: belátjuk, hogy

(4) (b_n) szigorúan monoton nő, így (3)-hoz hasonlóan $\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{2n+1}{2n+2}$.

A bizonyítandó

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2(n-1)+1}\right) < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$$

egyenlőtlenséget írjuk át előbb

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n > \frac{(2n+1)(n-1)}{(2n-1)(n+1)}$$

alakba. A binomiális tétel szerint

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{1}{n^{2i}} =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\binom{n}{2k}\frac{1}{n^{4k}} - \binom{n}{2k+1}\frac{1}{n^{4k+2}}\right], & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\left[\binom{n}{2k}\frac{1}{n^{4k}} - \binom{n}{2k+1}\frac{1}{n^{4k+2}}\right] + \binom{n}{n}\frac{1}{n^{2n}}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Itt

$$\binom{n}{2k}\frac{1}{n^{4k}} - \binom{n}{2k+1}\frac{1}{n^{4k+2}} =$$

$$= \frac{n!}{(2k+1)!(n-2k)!}\frac{1}{n^{4k+2}}\big(n(n-1) + 2k(n^2+1)\big) \geq 0.$$

Ezért bármely n esetén

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq \left(1-\binom{n}{1}\frac{1}{n^2}\right) + \left(\binom{n}{2}\frac{1}{n^4} - \binom{n}{3}\frac{1}{n^6}\right).$$

Így (4) állítását $n \geq 3$ esetén igazolja az

$$\left(1-\binom{n}{1}\frac{1}{n^2}\right) + \left(\binom{n}{2}\frac{1}{n^4} - \binom{n}{3}\frac{1}{n^6}\right) > \frac{(2n+1)(n-1)}{(2n-1)(n+1)}$$

egyenlőtlenség, azaz

$$\frac{6n^6 - 6n^5 + 3n^3(n-1) - n(n-1)(n-2)}{6n^6} > \frac{(2n+1)(n-1)}{(2n-1)(n+1)},$$

$$12n^8 - 6n^7 - 6n^6 + n^5 - n^4 + 3n^3 - 5n^2 + 2n > 12n^8 - 6n^7 - 6n^6,$$

$$n^4(n-1) + n^2(3n-5) + 2n > 0,$$

ami valóban igaz; $b_1 < b_2$ pedig nyilvánvaló.

Szükségünk lesz még a következő egyenlőtlenség(ek)re:

(5) $$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Itt $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3$ (ez a $2n-1$ szemifaktoriális) és hasonlóan $(2n)!! = 2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2$. Az (5) egyenlőtlenség mindössze azon múlik, hogy

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{-1},$$

amiből az (5) első fele átszorzással és négyzetgyökvonással adódik. A bizonyítandó egyenlőtlenség második fele ennek csupán átrendezett alakja.

Immár minden rendelkezésre áll (1) bizonyításához. Legyen $c_n = \dfrac{n^n}{e^n n!}$. Erre a sorozatra

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,$$

így (3) és (4) alapján

$$\frac{2k}{2k+1} < \frac{c_{k+1}}{c_k} < \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Az $1 \le k \le n-1$ esetén kapott egyenlőtlenségek szorzatát véve

$$\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} < \frac{c_n}{c_1} < \frac{2(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

amiből (5) figyelembevételével

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}} < \frac{c_n}{c_1} < \frac{2}{\sqrt{2n+1}},$$

ezért (az alsó becslés értékét csökkentve, a felsőét pedig megnövelve)

$$\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}} < c_n < \frac{1}{e}\cdot\sqrt{\frac{2}{n}},$$

ez pedig éppen (1)-et adja.