1. Bevezetés

Amikor két és fél éves Péter unokámmal töltöttem az időt, gyakran támadt kedve azzal szórakozni, hogy cseréljük össze a lakás falaira akasztott három vagy négy órát. Ez a cserebere-játék természetesen akkor igazán érdekes, ha az órák egyike sem marad a megszokott helyén.

Mint tudjuk, egy n elemű halmaz elemeit $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2$-féleképpen lehet sorba állítani (permutálni). A kérdés tehát az, hogyan oszlik meg az $n!$ permutáció aszerint, hogy mennyi – egy rögzített „eredeti" sorrendhez képest – a helyben maradó elemek száma; jelöljük ezért $\psi(n,k)$-val egy n elemű halmaz azon permutációinak a számát, amelyeknél az eredeti helyükön álló elemek száma pontosan k.[1] Ekkor nyilván

$$\sum_{k=0}^{n} \psi(n,k) = n!. \tag{1}$$

A későbbi eredményeket némileg megelőlegezve tekintsük át a $\psi(n,k)$ értékeit $n \le 8$-ra:

	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n										
1		0	1							
2		1	0	1						
3		2	3	0	1					
4		9	8	6	0	1				
5		44	45	20	10	0	1			
6		265	264	135	40	15	0	1		
7		1854	1855	924	315	70	21	0	1	
8		14833	14832	7420	2464	630	112	28	0	1

Világos, hogy $\psi(n,n) = 1$ és $\psi(n,n-1) = 0$ (minden n-re). Az is látható, hogy a táblázat első $n-1$ sorának ismeretében az n-edik sor elemei a legelső kivételével könnyen meghatározhatók: ha ugyanis $1 \le k \le n-1$, akkor $\binom{n}{k}$-féleképpen választható ki a helyén maradó k elem, és minden ilyen választás esetén $\psi(n-k,0)$ olyan permutáció van, amelynél a fennmaradó $n-k$ elem egyike sincs az eredeti helyén. Így

$$\psi(n,k) = \binom{n}{k}\psi(n-k,0), \quad \text{ha} \quad 1 \le k \le n-1. \tag{2}$$

Hátra van még a $\psi(n,0)$ értékének kiszámítása. Ez megtehető például az (1) összefüggés felhasználásával:

$$\psi(n,0) = n! - \sum_{k=1}^{n} \psi(n,k) = n! - 1 - \sum_{k=1}^{n-2} \psi(n,k). \tag{3}$$

A (2) és (3) formulák ismételt alkalmazásával (a nyilvánvaló $\psi(1,0) = 0$, $\psi(1,1) = 1$-ből kiindulva) minden $\psi(n,k)$ kiszámítható. Mégsem lehetünk maradéktalanul elégedettek: a $\psi(n,0)$ értékeknek ezen a „kerülő úton" történő meghatározása meglehetősen átláthatatlanná teszi a folyamatot, és nem ad választ például arra a természetes módon felvetődő kérdésre, hogy a táblázatban megfigyelhető

$$\psi(n,1) = \psi(n,0) \pm 1$$

összefüggés vajon minden n-re teljesül-e. A felmerült kételyekre választ kaphatunk, ha ψ értékeit egy másfajta összefüggés segítségével határozzuk meg.

2. A $\psi(n,k)$ kiszámítása szitálással

A szitaformula. Legyen H véges halmaz, G_1, G_2, ..., G_n pedig részhalmazok H-ban. Tetszőleges X_i halmazok elemszámát $|X_i|$-vel, metszetüket $X_i \cap X_j \cap \ldots \cap X_t$-vel, egyesítésüket $X_i \cup X_j \cup \ldots \cup X_t$-vel, két halmaz különbségét pedig $X_i \setminus X_j$-vel jelöljük. A felsorolt G_i részhalmazokra legyen $N_{\{i,j,\dots,t\}} = |G_i \cap G_j \cap \ldots \cap G_t|$. A *szitaformula* szerint ekkor

$$\left|H \setminus (G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n)\right| = \sum_{L \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|L|} N_L. \tag{4}$$

[1] Az $n = 6$, $k = 2$ esetet illusztrálja a belső borító.

A jelölések és halmazok metszetének értelmezése szerint az üres halmazt $\emptyset$-val jelölve $N_\emptyset = |H|$, hiszen ilyenkor a metszetbe tartozás semmilyen követelményt nem jelent, így annak a H minden eleme eleget tesz. A (4) formula igazolásához először is jegyezzük meg, hogy a bal oldalon a H azon elemeinek a száma áll, amelyek egyik G_i részhalmazban sincsenek benne. A formula jobb oldala pedig a $G_i \cap G_j \cap \ldots \cap G_t$ metszetek elemszámának a $(-1)^{|\{i,j,\ldots,t\}|}$-vel súlyozott összege, ahol $\{i, j, \ldots, t\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Legyen x a H egy tetszőleges eleme. Ha x a G_i részhalmazok egyikének sem eleme, akkor ő a bal oldalon található halmaz elemszámához 1-gyel járul hozzá; ha pedig benne van legalább egy G_j-ben, akkor a különbséghalmaz elemszámához 0-val járul hozzá. Vizsgáljuk meg ugyanezt a jobb oldalon szereplő metszethalmazok szempontjából is. Amennyiben x egyik G_i-nek sem eleme, akkor a metszetek közül egyedül az „üresben" van benne, ezért a – súlyozott – hozzájárulása $(-1)^0 \cdot 1 = 1$. Tekintsük ezután azt az esetet, amikor x eleme a $G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_k}$ halmazoknak, a többinek pedig nem ($n \geq k \geq 1$). Ekkor x pontosan azokban a metszetekben van benne, amelyek $G_s \cap G_t \ldots \cap G_b$ alakúak, ahol $S = \{s, t, \ldots, b\} \subseteq \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Így az x „súlyozott" járuléka (4) jobb oldalához:

$$\sum_{S:\, S \subseteq \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} (-1)^{|S|} = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \binom{k}{\ell} = (1-1)^k = 0.$$

(Az utolsó előtti lépésben a binomiális tételt alkalmaztuk $(1-1)^k$ kiszámítására). Ezzel a (4)-et be is láttuk.

Egy újabb előállítás ψ-re. Alkalmazzuk a szitaformulát a $\psi(n,k)$ értékek meghatározására. Ennek érdekében jelölje H az $1, 2, \ldots, n$ számok összes permutációinak a halmazát; tekintsük e számok növekvő sorrendjét az eredeti sorrendjüknek. Legyen továbbá G_k azoknak a permutációknak a halmaza, amelyeknél a k az eredeti helyén szerepel ($1 \leq k \leq n$). Ekkor $\psi(n, 0)$ éppen a $H \setminus (G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n)$ elemeinek a száma. Hány eleme van egy $G_{v_1} \cap G_{v_2} \cap \ldots \cap G_{v_t}$ metszetnek? Ez éppen azoknak a permutációknak a száma, amelyeknél $v_1, v_2, \ldots, v_t$ az eredeti helyén áll, ezért a fennmaradó $n-t$ elem permutációit kell csak megszámlálnunk, az eredmény természetesen $(n-t)!$. Ezért, a szitaformula alapján

$$\psi(n,0) = \sum_{t=0}^{n} \sum_{\{v_1,\ldots,v_t\}} (-1)^t (n-t)! = \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \binom{n}{t} (n-t)! = n! \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \frac{1}{t!}.$$

A kapott eredményt n helyett $(n-k)$-ra felírva, (2) szerint a kívánt előállítás:

(5) $$\psi(n,k) = \binom{n}{k} (n-k)! \sum_{t=0}^{n-k} (-1)^t \frac{1}{t!} = \frac{n!}{k!} \sum_{t=0}^{n-k} (-1)^t \frac{1}{t!}.$$

Az (5) formulának több érdekes következménye is van. Vizsgáljuk először $\psi(n,0)$ és $\psi(n-1,0)$ kapcsolatát:

$$\psi(n,0) - n\psi(n-1,0) = n! \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \frac{1}{t!} - n(n-1)! \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \frac{1}{t!} =$$

$$= n! \frac{(-1)^n}{n!} = (-1)^n,$$

azaz a következő egyszerű rekurzió adódik $\psi(n,0)$ értékeire:

(6) $$\psi(n,0) = n \cdot \psi(n-1,0) + (-1)^n.$$

Vessük ezt össze a (2) speciális eseteként adódó

(7) $$\psi(n,1) = n\psi(n-1,0)$$

egyenlőséggel:

(8) $$\psi(n,0) = n\psi(n-1,0) + (-1)^n = \psi(n,1) + (-1)^n,$$

tehát a táblázatból korábban megsejtett összefüggés valóban általános érvényű.

Befejezésül vizsgáljuk meg a

$$\sigma(n) = \psi(n,0) + \psi(n,1) + \psi(n,n)$$

viselkedését; ez azoknak a permutációknak a száma (és ezek teszik ki a túlnyomó többséget!), amelyeknél legfeljebb egy elem áll az eredeti helyén, vagy mindegyik. Megmutatjuk, hogy

(9) $$\sigma(n) = \begin{cases} n \cdot \sigma(n-1), & \text{ha } n \text{ páratlan;} \\ n \cdot \sigma(n-1) - 2(n-1) = \left(n - \dfrac{2}{\sigma(n-2)}\right) \sigma(n-1), & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Tegyük föl először, hogy n páratlan. Ekkor (8) és (7) alapján

$$\frac{\sigma(n)}{\sigma(n-1)} = \frac{\psi(n,0)+\psi(n,1)+1}{\psi(n-1,0)+\psi(n-1,1)+1} = \frac{\psi(n,1)-1+\psi(n,1)+1}{\psi(n-1,0)+\psi(n-1,0)-1+1} =$$

$$= \frac{\psi(n,1)}{\psi(n-1,0)} = n.$$

Ha pedig n páros, akkor (6) és (7) szerint

$$\sigma(n) = \psi(n,0)+\psi(n,1)+1 = n\psi(n-1,0)+1+n\psi(n-1,0)+1,$$

ami viszont (8) alapján

$$n\bigl(\psi(n-1,1)-1\bigr)+1+n\psi(n-1,0)+1 = n\sigma(n-1)-2(n-1).$$

Mivel most $n-1$ páratlan, azért, mint már beláttuk,

$$\frac{\sigma(n-1)}{\sigma(n-2)} = n-1.$$