Ez év március 19. és március 23. között zajlott le a magyar és izraeli diákok közti hagyományos matematikaverseny. A lényegében háborús izraeli helyzet miatt a versenyre a tavalyi év után ismét Budapesten került sor. Akárcsak tavaly, a vendéglátó a budapesti Lauder Javne gimnázium volt.

A két országot hattagú csapatok képviselték. A magyar csapat tagjai a következők voltak:

Csikvári Péter	12. évf.	(Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium);
Gerencsér Balázs	12. évf.	(Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium);
Hablicsek Márton	10. évf.	(Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium);
Harangi Viktor	12. évf.	(Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium);
Jankó András	11. évf.	(Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium);
Rácz Béla András	10. évf.	(Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium)

A versenyen örvendetes módon a két csapaton kívül „nem hivatalosan” részt vett a vendéglátó iskola két diákja, *Biró Julia* és *Szántó András* és az iskola vendégeként *Szilvási Sándor*, a veszprémi Lovassy László Gimnázium tanulója.

Az első két napon került sor a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia lebonyolításához hasonló egyéni versenyre. Mindkét napon 3-3 feladatot kellett megoldani, ehhez 4,5 óra állt a diákok rendelkezésére. Az egyes feladatok hibátlan megoldásával 7 pontot lehetett szerezni. Idén a feladatsor kissé könnyebbnek bizonyult a szokásosnál.

Két izraeli diák, az immár negyedszer résztvevő *Ran Tessler* és a vendégcsapat egyetlen újonca, *Yedidya Yoni* érte el a maximális, 42 pontot. A magyar diákok közül *Csikvári Péter* és *Rácz Béla András* szerepeltek a legjobban: egyformán 34 pontot szereztek. Bár a verseny egyéni volt, minden évben kiszámoljuk a két csapat pontszámát: az izraeli diákok összesen 157, a magyarok pedig 149 pontot szereztek.

A harmadik napon került sor a csapatversenyre, ahol a polinomok témaköréből tűztünk ki egymásra épülő feladatokat. A 3 fős csapatoknak 3,5 órájuk volt arra, hogy a problémákat megoldják. Itt is a kitűnően felkészült vendégek szerepeltek jobban, egyik csapatuk lényegében valamennyi feladatot megoldotta.

A versenynapok délutánján angol nyelvű előadásokra került sor: az első versenynapon *Pelikán József* (ELTE TTK) tartott algebrai tárgyú előadást, a másodikon *Moussong Gábor* (ELTE TTK) *Turning Numbers* címmel látványos számítógépes szimulációval kísért geometriai tárgyú előadása aratott méltán nagy sikert, a zárónapon pedig *Gyárfás András* (MTA SZTAKI) beszélt gráfok és hipergráfok kromatikus számával kapcsolatos problémákról.

Az alábbiakban ismertetjük a verseny feladatait.

1. Keressük meg azt a legnagyobb pozitív egész k számot, amelyre 2001^k osztója a

$$2000^{2001^{2002}} + 2002^{2001^{2000}}$$

számnak.

2. Az egyenlő oldalú ABC háromszög belsejében lévő A_1, B_1, C_1 pontokra teljesül, hogy

$$B_1AB\sphericalangle = A_1BA\sphericalangle = 15^\circ,$$

$$C_1BC\sphericalangle = B_1CB\sphericalangle = 20^\circ,$$

$$A_1CA\sphericalangle = C_1AC\sphericalangle = 25^\circ.$$

Mekkorák az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei?

3. Legyen $p \geq 5$ prímszám. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pozitív egész a, amelyik kisebb, mint $p-1$ és sem $a^{p-1}-1$, sem pedig $(a+1)^{p-1}-1$ nem osztható p^2-tel.

4. A nemnegatív x, y számokra

$$x^3 + y^4 \leq x^2 + y^3.$$

Bizonyítsuk be, hogy $x^3 + y^3 \leq 2$.

5. Az ABC háromszög belső M pontjából bocsássunk merőlegeseket a háromszög oldalegyeneseire. Jelölje rendre A', B', C' a megfelelő talppontokat a BC, CA, AB oldalakon és legyen

$$p(M) = \frac{MA' \cdot MB' \cdot MC'}{MA \cdot MB \cdot MC}.$$

Az M pont milyen helyzetében maximális a $p(M)$ mennyiség?

6. A legalább másodfokú racionális együtthatós $p(x)$ polinomra és a racionális számokból álló r_n sorozatra teljesül, hogy $r_n = p(r_{n+1})$ minden pozitív egész n esetén. Igazoljuk, hogy az r_n sorozat periodikus, azaz alkalmas k pozitív egésszel $r_n = r_{n+k}$ minden $n \geq 1$ esetén.

A csapatverseny feladatai

Legyen a $p(x)$ és a $q(x)$ két nem konstans valós együtthatós polinom. Azt mondjuk, hogy a $p(x)$ és a $q(x)$ fölcserélhetők, ha $p\big(q(x)\big) = q\big(p(x)\big)$.

1. Legyen $f(x) = 2x^2$. Keressük meg azokat a $g(x)$ polinomokat, amelyek fölcserélhetők az $f(x)$ polinommal.

2. Legyen $a \neq 0$ adott valós szám és $f(x) = ax+1$. Keressük meg azokat a $g(x)$ polinomokat, amelyek fölcserélhetők az $f(x)$ polinommal.

3. Legyen a adott valós szám és $f(x) = x^2 - a$. Keressük meg azokat a legfeljebb harmadfokú $g(x)$ polinomokat, amelyek fölcserélhetők az $f(x)$ polinommal.

4. Adott másodfokú $f(x)$ polinomhoz keressük meg azokat a negyedfokú $g(x)$ polinomokat, amelyek fölcserélhetők az $f(x)$ polinommal.

5. Legyen az $f(x)$ tetszőleges másodfokú polinom. Bizonyítsuk be, hogy ha a $p(x)$ és a $q(x)$ polinomok mindketten fölcserélhetők az $f(x)$ polinommal, akkor egymással is fölcserélhetők.

6. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan végtelen $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x), \ldots$ polinomsorozat, amelynek bármely két tagja fölcserélhető, a $p_k(x)$ k-adfokú, és

$$p_2(x) = x^2 - 2.$$

7. Keressük meg mindazokat a

$$p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x), \ldots$$

polinomsorozatokat, amelyeknek bármely két tagja fölcserélhető és a $p_k(x)$ k-adfokú polinom.