Bizonyítsuk be első lépésként a következő állítást: Ha $2^k\alpha \neq m\pi$ ($k = 0, 1, \ldots, n$; m egész szám), akkor:

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 4\alpha}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(2^n-1)\alpha}{\sin 2^n\alpha}. \tag{2}$$

A bizonyítás módszere teljes indukció. $n=1$ esetben az állítás triviális. Tegyük fel, hogy n-re teljesül az állításunk, megmutatjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz.

Az utolsó n tagra és α helyébe 2α-t írva alkalmazzuk az indukciós feltevésünket, és a $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ azonosságokat:

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}+\left(\frac{1}{\sin 2(2\alpha)}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n(2\alpha)}\right)=\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\sin(2^n-1)\cdot 2\alpha}{\sin 2^n\cdot 2\alpha}=$$
$$=\frac{1}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\sin 2^n\cdot 2\alpha+\sin(2^n-1)\cdot 2\alpha}{\sin 2^{n+1}\alpha}=\frac{1}{2\sin\alpha\,\cos\alpha}\cdot\frac{2\sin(2^{n+1}-1)\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin 2^{n+1}\alpha}=$$
$$=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(2^{n+1}-1)\alpha}{\sin 2^{n+1}\alpha}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Ha $\alpha=\frac{\pi}{2^{n+1}-1}$, akkor $\sin(2^n-1)\alpha=\sin 2^n\alpha$, mivel az argumentumok összege π. Az állítás feltételei teljesülnek, hiszen $0\le k\le n$ esetén $0<2^k\alpha=\frac{2^k\cdot\pi}{2^{n+1}-1}<\pi$ így (2) épp a bizonyítandó egyenlőséget adja.

Knébel István (Budapest, József Attila. Gimn., IV. o. t.)