

1. Tekintsük az $x^2 + 4kx + 4(2k - 1) = 0$ egyenletet, ahol k valós paraméter. Igazoljuk, hogy az egyenletnek minden valós k esetén van valós megoldása. Oldjuk meg az egyenletet, ha a gyökök négyzetének összege a lehető legkevesebb.

Megoldás. Az egyenlet diszkriminánsa $D = 16k^2 - 16(2k - 1) \equiv (4(k - 1))^2 \geq 0$ minden valós k -ra, így valóban mindig van megoldás. Most $x_1 = -2$, $x_2 = -4\left(k - \frac{1}{2}\right)$, ezért $x_1^2 + x_2^2 = 4 + 16\left(k - \frac{1}{2}\right)^2$, ami akkor a legkevesebb, ha $k = \frac{1}{2}$. Ekkor $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.

Megjegyzés: A feladat második része a gyökök és együtthatók közötti összefüggések felhasználásával is megoldható:

$$x_1^2 + x_2^2 \equiv (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16k^2 - 8(2k - 1) \equiv 16\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + 4.$$

2. Igazoljuk, hogy egy rombusz oldala pontosan akkor (akkor és csak akkor) mértani közepe a rombusz átlóinak, ha a rombusz hegyesszöge 30° .

Megoldás. Jelölje a rombusz oldalát a , a két átlót e és f .

Ha a rombusz hegyesszöge $\alpha = 30^\circ$, akkor a rombusz magassága $m = \frac{a}{2}$. A rombusz területe egyrészt $T = \frac{a^2}{2}$, másrészt $T = \frac{ef}{2}$, így $a^2 = ef$, tehát a az e és f mértani közepe ($a > 0$, $e > 0$, $f > 0$).

Ha $a^2 = ef$, akkor $T = a^2 \sin \alpha$ és $T = \frac{ef}{2}$ miatt $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$, mert α hegyesszög.

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) \quad \sqrt[3]{15 + 2x} + \sqrt[3]{13 - 2x} = 4; \quad b) \quad \log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0;$$

$$c) \quad \cos^4 x + \cos^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Megoldás. a) Az egyenlet minden valós számra értelmezett. Emeljük köbre az egyenlet mindkét oldalát (ez ekvivalens átalakítás) és alkalmazzuk az

$$(a + b)^3 \equiv a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

azonosságot:

$$15 + 2x + 13 - 2x + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{(15 + 2x)(13 - 2x)} = 64,$$

$$\sqrt[3]{-4x^2 - 4x + 195} = \sqrt[3]{27},$$

ahonnan $x_1 = 6$, $x_2 = 7$, és ezek valóban megoldások.

b) Az egyenlet akkor értelmezett, ha $x > 0$ és $x \neq 1$, $x \neq 3$, $x \neq 81$. Alkalmazzuk az $\log_a b \equiv \frac{1}{\log_b a}$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$) és az $\log_a \frac{x}{y} \equiv \log_a x - \log_a y$ ($x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) azonosságokat. Ekkor

$$\frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3 x - 1} + \frac{1}{\log_3 x - 4} = 0,$$

ahonnan $\log_3 x = 2$ vagy $\log_3 x = -2$. Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{1}{9}$.

c) Alkalmazzuk a $\cos^2 \alpha \equiv \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$, valamint a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \equiv \sin \alpha$ és $\cos(-\alpha) \equiv \cos \alpha$ azonosságokat.

$$\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2 \sin 2x + \sin^2 2x = 1,$$

$$\left(\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \equiv \sin 2x\right),$$

$$\sin 2x + \cos 2x = -1.$$

Ez utóbbi egyenlet sokféle módon oldható meg. Az egyenlet azokra az x -ekre igaz, amelyekre $\sin 2x = -1$ és $\cos 2x = 0$ vagy $\sin 2x = 0$ és $\cos 2x = -1$, azaz ha $x_k = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) vagy $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$). ($\sin 2x + 2 \cos^2 x = 0$, $2 \cos x(\sin x + \cos x) = 0$.)

4. Az ABC háromszögben $AC = 5,8$, $BC = 5$ egység, az AB oldalhoz tartozó magasság $m_c = 4$ egység. Számítsa ki a háromszög köré írt kör sugarát és a háromszög területét.

Megoldás. A háromszög területe egyrészt $T = \frac{c \cdot m_c}{2}$, másrészt $T = \frac{abc}{4r}$, ahol r a háromszög köré írt kör sugara. $\frac{c \cdot 4}{2} = \frac{5,8 \cdot 5 \cdot c}{4r}$, ahonnan $r = 7,25$ egység. A feltételeknek két háromszög felel meg. Erre a megállapításra szerkesztés lehetőségének elemzése, *előjeles* szakasszal való számolás vagy trigonometria alkalmazásával juthatunk. Pl. legyen $CBA \sphericalangle = \beta$. Ekkor $\sin \beta = \frac{4}{5}$, így $\cos \beta = \frac{3}{5}$ vagy $\cos \beta = -\frac{3}{5}$. Koszinusztételekkel $5,8^2 = 5^2 + c^2 - 2 \cdot 5 \cdot c \cdot \frac{3}{5}$ vagy $5,8^2 = 5^2 + c^2 + 2 \cdot 5 \cdot c \cdot \frac{3}{5}$, ahol $c > 0$, így $c = 7,2$ vagy $c = 1,2$, tehát a háromszög területe $T = \frac{7,2 \cdot 4}{2} = 14,4$ vagy $T = \frac{1,2 \cdot 4}{2} = 2,4$ területegység.

5. Igazoljuk, hogy minden n pozitív egész számra

- a) $36^n + 10 \cdot 3^n$ osztható 11-gyel;
 b) $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ osztható 84-gyel!

Megoldás. a) A binomiális tétel alkalmazásával

$$36^n + 10 \cdot 3^n \equiv (33 + 3)^n + 10 \cdot 3^n = 33 \cdot k + 3^n + 10 \cdot 3^n = 11 \cdot (3k + 3^n).$$

(A kifejezés osztható $3 \cdot 11 = 33$ -mal.)

$$(36^n + 10 \cdot 3^n = 3^n(12^n + 10) = 3^n((12^n - 1^n) + 11) = 33k.)$$

b) Az eredeti állítás már $n = 1$ -re sem igaz.

Helyesbítés: Az eredeti feladat helyesen a következő:

- b) $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ osztható 84-gyel!

Ismeretes, hogy $a^n - b^n$ osztható $(a - b)$ -vel.

$$4^{2n} - 3^{2n} - 7 = 16^n - 9^n - 7 = (16 - 9)k - 7 = 7m;$$

$$4^{2n} - 3^{2n} - 7 = (4^{2n} - 1) - 3^{2n} - 6 = (4 - 1)k - 3l = 3m;$$

$$4^{2n} - 3^{2n} - 7 = (4^{2n} - 8) - (3^{2n} - 1) = 8k - 8l = 8m.$$

Az adott kifejezés tehát osztható 7-tel, 3-mal és 8-cal, mivel ezek relatív prímszámok, ezért osztható a szorzatukkal $3 \cdot 7 \cdot 8$ -cal, 168-cal is. (No persze így 84-gyel is.)

6. a) Tekintsük azt az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ függvényt, ahol

$$f(x) = (ax + b)^2 + (cx + d)^2,$$

ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $ac \neq 0$. Az f függvény melyik x helyen veszi fel a legkisebb értékét, és mennyi ez a legkisebb érték?

b) Melyik az a legbővebb halmaz, amelyre a $g(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}$ értelmezhető? Tekintsük az ezen a halmazon értelmezett $x \mapsto g(x)$ függvényt. Felveszi-e a g függvény a legnagyobb, illetve a legkisebb értéket? Ha felveszi, akkor melyik x helyen veszi fel és mennyi a függvény szélsőértéke?

Megoldás. a) $f(x) = (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)x + b^2 + d^2$. Azonos átalakításokkal

$$f(x) = (a^2 + c^2) \left(x + \frac{ab + cd}{a^2 + c^2} \right)^2 + \frac{(ad - bc)^2}{a^2 + c^2}.$$

A függvény az $x_0 = -\frac{ab + cd}{a^2 + c^2}$ helyen veszi fel a legkisebb értékét, a legkisebb érték: $\frac{(ad - bc)^2}{a^2 + c^2}$.

b) A $g(x)$ kifejezés akkor értelmezhető, ha $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} 2x$ értelmezhető és ha $1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \neq 0$. Ez utóbbi minden megengedett x -re teljesül, így $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $2x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n \cdot \pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Minden más valós számra értelmezhető a $g(x)$.

Azonos átalakításokkal

$$1 + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \equiv \frac{\cos x \cdot \cos 2x}{\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x} \equiv \frac{\cos x \cos 2x}{\cos x} \equiv \cos 2x.$$

A megadott halmazon a függvény legnagyobb értéke 1, amit az $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken vesz fel. A függvény a legkisebb értékét soha nem veszi fel. ($\cos 2x = -1$, ha $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. x_n nem tartozik az értelmezési tartományba.)

7. Igazoljuk, hogy az $A(1; -1)$, $B(3; 3)$ és $C(4; 5)$ pontok egy egyenesre illeszkednek. Milyen arányban osztja a B pont az AC szakaszt? Mi azon P pontok halmaza és annak egyenlete, amelyekre $\frac{AP}{PB} = \frac{AB}{BC}$?

Helyesbítés: Az utolsó képlet helyesen: $\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{BC}$.

Megoldás. Mivel $\overrightarrow{AB} = (2; 4)$ és $\overrightarrow{BC} = (1; 2)$, ezért A , B és C egy egyenesre illeszkednek és $AB = 2BC$.

Azon $P(x, y)$ pontok halmazát keressük, amelyekre $\frac{AP}{PC} = 2$, azaz $AP = 2 \cdot PC$. Mivel $AP \geq 0$ és $PC \geq 0$, ezért a négyzetemeléssel kapott egyenlet, $AP^2 = 4 \cdot PC^2$, ekvivalens a feltételi egyenlettel, így

$$(1) \quad (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4((x - 4)^2 + (y - 5)^2).$$

Innen azonos átalakítással és egyenletrendezéssel a következő, a feltételi egyenlettel ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$(2) \quad (x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 20.$$

A keresett ponthalmaz tehát körvonal, amelynek középpontja $K(5; 7)$, sugara $r = 2\sqrt{5}$.

Megjegyzés: az eredeti szövegezéssel is megoldható a feladat, csak a kör egyenlete nem ilyen „szép”. Így a megfelelő egyenletek:

$$(1) \quad (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4((x - 3)^2 + (y - 3)^2).$$

Innen azonos átalakítással és egyenletrendezéssel a következő, a feltételi egyenlettel ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$(2) \quad \left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{3}\right)^2 = \frac{80}{9}.$$

8. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a

$$\cos 2x + (1 - 2 \sin y) \cos x + 1 - \sin y = 0$$

kétismeretlenes egyenletet.

Megoldás. $\cos 2x + 1 \equiv 2 \cos^2 x$, így

$$2 \cos^2 x + (1 - 2 \sin y) \cos x - \sin y = 0,$$

ahonnan $\cos x = -\frac{1}{2}$ vagy $\cos x = \sin y$. Az előbbi megoldásai

$$x_{1,k} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad y_{1,k} \in \mathbb{R} \quad \text{vagy} \quad x_{2,n} = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, \quad y_{2,n} \in \mathbb{R}.$$

A másik esetben $\cos x = \sin y$, azaz $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, tehát $x = \frac{\pi}{2} - y + 2k\pi$ vagy $x = y - \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Innen a megoldások:

$$x_{1,k} = \frac{\pi}{2} - t + 2k\pi, \quad y_{1,k} = t, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}$$

vagy

$$x_{2,n} = t - \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad y_{2,n} = t, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}.$$