A matematika számos ágában bukkan fel és tölt be fontos szerepet az n nemnegatív egész szám faktoriálisa, melyet pozitív egész n-ekre az

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

összefüggés definiál, $0!$ értéke pedig megállapodás szerint 1. Cikkünk célja, hogy az $n!$ kifejezést egyszerűbb, az analízis szempontjából könnyebben kezelhető mennyiségekkel becsüljük meg, illetve ismertessük a nagyságrendjére vonatkozó legfontosabb közelítéseket. A cikk további részében n mindvégig pozitív egész számot jelöl.

Kiindulásul tekintsük a Négyjegyű függvénytáblázatban is szereplő

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

összefüggést, ahol szokás szerint e ($\approx 2{,}71828$) jelöli a természetes logaritmus alapszámát. A fenti képlet – mely *Stirling-formula* néven ismert – *aszimptotikus becslést* fejez ki, ami azt jelenti, hogy $n!$ értéke „nagy" n-ekre „körülbelül" $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. Ezen azt értjük, hogy az

$$a_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

képlettel definiált sorozat határértéke 1. Ahhoz, hogy képet kapjunk a formula viselkedéséről, érdemes néhány n-re megvizsgálni $n!$ és $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ egymáshoz viszonyított értékeit. (Az itt fellépő elképesztően nagy számokat szemlélteti a cikk végén szereplő 4. Megjegyzés.)

n	$n!$	$(n/e)^n\sqrt{2\pi n}$	a_n
1	1	0,9221	1,084 44
2	2	1,919	1,042 21
3	6	5,836	1,028 06
$\vdots$			
10	3 628 800	3 598 695,6	1,008 365
$\vdots$			
100	$9{,}332\,62 \cdot 10^{157}$	$9{,}324\,84 \cdot 10^{157}$	1,000 833 6
$\vdots$			
1000	$4{,}023\,87 \cdot 10^{2567}$	$4{,}023\,53 \cdot 10^{2567}$	1,000 083 33
$\vdots$			
10 000	$2{,}846\,25 \cdot 10^{35659}$	$2{,}846\,23 \cdot 10^{35659}$	1,000 008 333

Konkrét n-ekre azonban a Stirling-formula semmit sem mond $n!$ nagyságáról, ezért szeretnénk minden pozitív n-re érvényes alsó- és felső becsléseket nyerni.

Nemrégiben *Pfeil Tamás* az alábbi egyenlőtlenséget bizonyította be:

$$\frac{e}{\sqrt{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} < n! < e\sqrt{2}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

illetve ekvivalensen átírva

$$\frac{e}{2\sqrt{\pi}} < \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} < \frac{e}{\sqrt{\pi}}, \quad \text{azaz} \quad 0{,}766 < \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} < 1{,}533.$$

Bizonyításában az a szép, hogy teljesen elemi eszközöket használ – csupán elemi egyenlőtlenségeket és a binomiális tételt. Tőle függetlenül sikerült a szerzőnek a valamivel élesebb $0{,}911 < \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} < 1{,}085$ egyenlőtlenséget bebizonyítania, ám a bizonyítás elemi volta elveszett: a felső becslés ugyanis deriválást használ, az alsó becsléshez pedig egy integrált kellett kiszámítani.

Most azt fogjuk megmutatni, hogy még erősebb eszközökkel, nevezetesen deriválással és a Stirling-formula felhasználásával (melynek bizonyítása hosszadalmas és szintén nem elemi) ezen egyenlőtlenségek tovább javíthatók, és meg is adjuk a_n legjobb alsó- és felső korlátját, azaz megkeressük a legnagyobb c_1 és a legkisebb c_2 valós számokat, melyekre minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_1 < \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \le c_2$.

A bizonyítás az alábbi észrevételen múlik.

Állítás. *Az a_n sorozat szigorúan monoton fogyó.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $a_n > a_{n+1}$ $(n \geq 1)$, azaz (mivel minden elem pozitív) $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1$. Ez ekvivalens a következőkkel:

$$1 < \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \sqrt{2\pi(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1} e^n \sqrt{n+1}}{n^n \sqrt{n}(n+1)e^{n+1}} =$$

$$= \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)e} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

vagyis az $e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ egyenlőtlenséget kell igazolnunk. Kész lesz a bizonyítás, ha megmutatjuk, hogy az $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ sorozat szigorúan monoton fogyó, hiszen az e szám definíciója folytán

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\cdot e,$$

és szigorúan monoton fogyó sorozat minden tagja nagyobb a sorozat határértékénél.

Az $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ sorozat helyett az $x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ függvényt vizsgálva deriváltjára

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \cdot \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+\frac{1}{2}}{x(x+1)}\right)$$

adódik (itt ln jelöli a természetes alapú logaritmust). Elég tehát megmutatni, hogy minden $x > 0$ esetén az $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x+\frac{1}{2}}{x(x+1)}$ függvény negatív. Ez viszont némi számolással következik abból, hogy $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ és minden $x > 0$-ra $f'(x) = \dfrac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$.

1. Megjegyzés. A $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ alakú sorozatok $\alpha = 0$-ra, illetve $\alpha = 1$-re az e szám szokásos definíciójában fordulnak elő. Könnyen látható, hogy tetszőleges $\alpha \in [0,1]$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$. Bebizonyítható továbbá, hogy éppen $\alpha = \dfrac{1}{2}$ esetén leggyorsabb a konvergencia.

Mivel a Stirling-formula szerint $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ és beláttuk, hogy a_n szigorúan monoton fogyó, ezért tetszőleges $n \geq 1$ esetén $a_n > 1$ valamint $a_n \leq a_1$ következik. Igaz tehát az alábbi

Következmény. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén*

$$1 < \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \leq \frac{e}{\sqrt{2\pi}},$$

és a bal-, illetve jobb oldalon álló $c_1 = 1$ és $c_2 = \dfrac{e}{\sqrt{2\pi}}$ konstansok nem javíthatók.

Eredeti kérdésünkhöz visszatérve $n!$-ra a fenti értelemben legjobb becsléseket kapjuk:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} < n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n e\sqrt{n}.$$

2. Megjegyzés. Taylor-sorfejtés és további függvényvizsgálatok segítségével (melyek nagyon sok számolást igényelnek) egyre finomabb becslések találhatók. Ezek közül egy (minden pozitív egész n-re érvényes) egyenlőtlenség az alábbi:

$$1 + \frac{1}{12n} < a_n < e^{\frac{1}{12n}} = 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots$$

vagyis

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}\right) < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{1}{12n}}.$$

A bizonyításban a

$$c_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{1}{12n}}}$$