1. Egy város lakóinak száma jelenleg 86 000. A növekedés mértéke évente 5%. Hány lakosa volt a városnak 3 évvel ezelőtt? Három év alatt hány százalékkal nőtt a lakosság létszáma?

Megoldás. Ha a város lakóinak száma három évvel ezelőtt x volt, akkor

$$x \cdot 1{,}05^3 = 8600, \quad x \cdot 1{,}1576 = 86\,000, \quad x = 74\,290.$$

A város lakóinak száma tehát 74 290 volt, a növekedés pedig 15,76%-os.

2. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x^{\log_3 y} + 2 \cdot y^{\log_3 x} = 27,$$

$$\log_3 y - \log_3 x = 1.$$

Megoldás. A logaritmus értelmezése szerint $x > 0$, $y > 0$. A második egyenletből

$$\log_3 y = \log_3 x + \log_3 3, \qquad \log_3 y = \log_3 3x,$$

így az $x \mapsto \log_3 x$ függvény szigorú monotonitása miatt $y = 3x$. Helyettesítéssel és azonos átalakításokkal

$$x^{\log_3 3x} + 2 \cdot (3x)^{\log_3 x} = 27, \qquad x^{1+\log_3 x} + 2 \cdot (3x)^{\log_3 x} = 27,$$

$$x \cdot x^{\log_3 x} + 2 \cdot 3^{\log_3 x} \cdot x^{\log_3 x} = 27,$$

$$x \cdot x^{\log_3 x} + 2 \cdot x \cdot x^{\log_3 x} = 27, \qquad x \cdot x^{\log_3 x} = 9.$$

Ez utóbbi egyenlet mindkét oldalának vegyük a hármas alapú logaritmusát (ez ekvivalens átalakítás), ekkor $\log_3 x + (\log_3 x)^2 = 2$, ahonnan $\log_3 x = 1$ vagy $\log_3 x = -2$, így $x_1 = 3$, $y_1 = 9$ vagy $x_2 = \frac{1}{9}$, $y_2 = \frac{1}{3}$. Mindkét számpár valóban megoldás.

3. Egy $2\sqrt{3}$ egység oldalú négyzet minden oldalára a négyzet belsejében olyan egyenlő szárú háromszögeket szerkesztünk, amelyeknél a szárak által bezárt szög 120°-os. Mekkora annak a négyszögnek a területe, amelynek csúcsai a háromszögek négyzeten belüli csúcsaival azonosak?

Megoldás. A keletkezett négyszög négyzet. A 120°-os egyenlő szárú háromszögek alapjához tartozó magasság 1 egység, így a négyzet átlóinak hossza $\left(2\sqrt{3} - 2\right)$ egység, a négyzet területe

$$T = \frac{\left(2\sqrt{3} - 2\right)^2}{2} = 8 - 4\sqrt{3}$$

területegység.

4. Az ABC derékszögű háromszög átfogója $AB = 2\sqrt{3}$ egység. Az átfogó felezőpontja C_1, a BC befogó felezőpontja A_1. A CC_1 súlyvonal merőleges az AA_1 súlyvonalra. Számítsuk ki a befogók hosszát.

Megoldás. Jelölje S a háromszög súlypontját. Az ASC és a CSA_1 is derékszögű háromszögek. Legyen $CA_1 = A_1B = a$, $AC = b$. Thalész tételéből $CC_1 = \sqrt{3}$, így $CS = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Legyen $SA_1 = x$, ekkor $AS = 2x$. Pitagorasz tételének alkalmazásával:

$$4a^2 + b^2 = 12, \qquad a^2 + b^2 = (3x)^2 \quad \text{és} \quad x^2 + \frac{4}{3} = a^2.$$

Helyettesítő módszerrel kaphatjuk a megoldást, $a = \sqrt{2}$, $2a = 2\sqrt{2}$, $b = 2$. A befogók hossza $AC = b = \sqrt{2}$ egység, $BC = 2a = 2\sqrt{2}$ egység.

5. Egy téglatest két oldallapjának területe 12 illetve 36 területegység, a testátló hossza 13 egység. Számítsuk ki a téglatest felszínét és térfogatát.

Megoldás. Jelölje a téglalap egy csúcsából induló éleit a, b és c. A feltételek alkalmazásával $ab = 12$, $bc = 36$ és $a^2 + b^2 + c^2 = 169$. Innen $c = 3a$, tehát $10a^2 + b^2 = 169$ és $b = \frac{12}{a}$, tehát $10a^2 + \frac{144}{a^2} = 169$, azaz $10a^4 - 169a^2 + 144 = 0$. Az egyenlet megoldása: $a^2 = 16$ vagy $a^2 = \frac{9}{10}$.

A feltételeknek két test felel meg, az egyiknek az élei $a = 4$, $b = 3$, $c = 12$ egység, a másiké $a = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $b = 4\sqrt{10}$, $c = \frac{9}{\sqrt{10}}$ egység. A két téglatest felszíne illetve térfogata: $A_1 = 2(12 + 36 + 48) = 192$ területegység, $A_2 = 2(12 + 36 + 2{,}7) = 101{,}4$ területegység, $V_1 = 3 \cdot 4 \cdot 12 = 144$ térfogategység, $V_2 = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{9}{\sqrt{10}} \cdot 4\sqrt{10} = \frac{108}{\sqrt{10}}$ ($\approx 34{,}154$) térfogategység.

6. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre az alábbi állítások közül pontosan két állítás igaz?

$$a) \qquad 120n - 4n^2 - 899 > 0;$$

$$b) \qquad n + 1 \text{ osztható 7-tel;}$$

$$c) \qquad n^2 - 1 \text{ osztható 7-tel.}$$

Megoldás. Az a) állítás akkor igaz, ha $4n^2 - 120n + 899 < 0$, azaz ha $14{,}5 < n < 15{,}5$, tehát $n = 15$.
A b) állítás akkor igaz, ha $n = 7k - 1$ alakú, ahol $n \in \mathbb{N}^+$.
A c) állítás akkor igaz, ha $n^2 = 7m + 1$ alakú, ahol $m \in \mathbb{N}$.
Az a) és a b) állítás egyszerre nem igaz, 15 nem $7k - 1$ alakú.
Az a) és a c) állítás egyszerre akkor igaz, ha $n = 15$ és ekkor a b) állítás nem igaz.
A b) és c) állítás egyszerre akkor igaz, ha $n = 7k - 1$, hiszen ekkor

$$n^2 - 1 = (7k - 1)^2 - 1 = 7(7k - 2),$$

ekkor a) nem igaz.

Pontosan két állítás akkor igaz, ha $n = 15$ vagy $n = 7k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakú.

7. Adjuk meg az α paraméter azon értékeit a $[0, 2\pi]$ intervallumban, amelyeknél a $(2\sin\alpha + 1)x^2 - 4x + 4\sin\alpha - 2 = 0$ egyenlet gyökei ellenkező előjelűek.

Megoldás. A pontosan másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ egyenletnek akkor és csak akkor van két ellenkező előjelű valós gyöke, ha $ac < 0$, hiszen ekkor az egyenlet diszkriminánsa $D = b^2 - 4ac > 0$ és a gyökök szorzata $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} < 0$. (Ha $c = 0$ vagy $ac > 0$, akkor ha van gyök, ezek egyike 0, vagy egyező előjelűek.)

Az adott egyenlet gyökei akkor ellenkező előjelűek, ha $2\sin\alpha + 1 \neq 0$, $\sin\alpha \neq -\dfrac{1}{2}$ és

$$(2\sin\alpha + 1)(4\sin\alpha - 2) < 0,$$

$$2 \cdot 4 \left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\right)\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\right) < 0,$$

ami akkor teljesül, ha $-\dfrac{1}{2} < \sin\alpha < \dfrac{1}{2}$.

Mivel $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, ezért a feltételeknek a következő értékek felelnek meg:

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{6} \quad \text{vagy} \quad \frac{5\pi}{6} < \alpha < \frac{7\pi}{6} \quad \text{vagy} \quad \frac{11\pi}{6} < \alpha \leq 2\pi.$$

8. Hány olyan egyenes illeszkedik a sík $B(4; 3)$ pontjára, amely az x tengelyt egész abszcisszájú pontjában, az y tengely pozitív felét prímszám ordinátájú pontjában metszi? Írjuk fel ezeknek az egyeneseknek az egyenletét.

Megoldás. Ha az egyenes az x tengelyt az $A(a; 0)$ $(a \in \mathbb{Z})$, az y tengelyt a $C(0; p)$ pontban metszi, akkor az egyenes egyenlete:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{p} = 1, \qquad px + ay = pa.$$

A $B(4; 3)$ pont rajta van az egyeneseken, ezért $4p + 3a = ap$. Azonos átalakításokkal

$$4p - ap + 3a = 0, \qquad p(4 - a) + 3(a - 4) + 12 = 0$$

$$(a - 4)(p - 3) = 12, \qquad a - 4 = \frac{12}{p - 3}.$$

p prímszám és $p - 3$ osztója 12-nek, ezért ha $p = 2$, akkor $a = -8$, ha $p = 5$, akkor $a = 10$, ha $p = 7$, akkor $a = 7$. A feltételeknek három egyenes felel meg, ezek egyenlete:

$$x - 4y = -8, \qquad x + 2y = 10, \qquad x + y = 7.$$