

1. Tekintsük az  $x^2 + 4kx + 4(2k - 1) = 0$  egyenletet, ahol  $k$  valós paraméter. Igazoljuk, hogy az egyenletnek minden valós  $k$  esetén van valós megoldása. Oldjuk meg az egyenletet, ha a gyökök négyzetének összege a lehető legkevesebb.
2. Igazoljuk, hogy egy rombusz oldala pontosan akkor (akkor és csak akkor) mértani közepe a rombusz átlóinak, ha a rombusz hegyesszöge  $30^\circ$ .
3. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) \sqrt[3]{15+2x} + \sqrt[3]{13-2x} = 4; \quad b) (\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3) + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0;$$

$$c) \cos^4 x + \cos^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

4. Az  $ABC$  háromszögben  $AC = 5,8$ ,  $BC = 5$  egység, az  $AB$  oldalhoz tartozó magasság  $m_c = 4$  egység. Számítsa ki a háromszög köré írt kör sugarát és a háromszög területét.
5. Igazoljuk, hogy minden  $n$  pozitív egész számra

$$a) 36^n + 10 \cdot 3^n \text{ osztható } 11\text{-gyel};$$

$$b) 4^{2n} - 3^{3n} - 7 \text{ osztható } 84\text{-gyel!}$$

6. a) Tekintsük azt az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$  függvényt, ahol

$$f(x) = (ax + b)^2 + (cx + d)^2,$$

ahol  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  és  $ac \neq 0$ . Az  $f$  függvény melyik  $x$  helyen veszi fel a legkisebb értékét, és mennyi ez a legkisebb érték?

b) Melyik az a legbővebb halmaz, amelyre a  $g(x) = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} 2x)}$  értelmezhető? Tekintsük az ezen a halmazon értelmezett  $x \mapsto g(x)$  függvényt. Felveszi-e a  $g$  függvény a legnagyobb, illetve a legkisebb értéket? Ha felveszi, akkor melyik  $x$  helyen veszi fel és mennyi a függvény szélsőértéke?

7. Igazoljuk, hogy az  $A(1; -1)$ ,  $B(3; 3)$  és  $C(4; 5)$  pontok egy egyenesre illeszkednek. Milyen arányban osztja a  $B$  pont az  $AC$  szakaszt? Mi azon  $P$  pontok halmaza és annak egyenlete, amelyekre  $\frac{AP}{PB} = \frac{AB}{BC}$ ?
8. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a

$$\cos 2x + (1 - 2 \sin y) \cos x + 1 - \sin y = 0$$

kétismeretlenes egyenletet.