1. Az eredeti kérdés

A KöMaL 2001/7. szám 407. oldalán kitűzött feladat így szólt:

B. 3438. *Az $f(x,y,z)$ függvényre teljesül, hogy bármely t valós számra*

$$f(x+t,y+t,z+t)=t+f(x,y,z)$$

$$f(tx,ty,tz)=t\cdot f(x,y,z) \tag{1}$$

$$f(x,y,z)=f(y,z,x)=f(x,z,y)$$

Mennyi $f(2000,2001,2002)$?

Tűzzük ki célul a feladatbeli függvényegyenlet-rendszer megoldását, azaz valamennyi, a fenti előírásnak eleget tevő függvény meghatározását. Ehhez először a háromváltozós függvényről szóló kérdést egyváltozós függvény keresésére vezetjük vissza.

Az első két egyenletből kapjuk, hogy

$$f(0,0,0)=0\cdot f(0,0,0)=0,$$

$$f(x,x,x)=x+f(0,0,0)=x,$$

valamint $x\neq y$ esetén

$$f(x,y,z)=x+f(0,y-x,z-x)=x+(y-x)f\left(0,1,\frac{z-x}{y-x}\right).$$

Vezessük most be az egyváltozós g függvényt a következőképpen: legyen $g(t)=f(0,1,t)$; ekkor az előző összefüggés

$$f(x,y,z)=x+(y-x)\cdot g\left(\frac{z-x}{y-x}\right)$$

alakba írható. Vegyük figyelembe, hogy $f(x,y,z)$ értéke nem függ az x,y,z változók sorrendjétől. Így az x és y felcserélésével azt kapjuk, hogy

$$f(x,y,z)=f(y,x,z)=y+(x-y)\cdot g\left(\frac{z-y}{x-y}\right).$$

A két utóbbi összefüggés jobb oldalai egyenlők; legyen ($x\neq y$ esetén) $t=\dfrac{z-x}{y-x}$, ekkor $1-t=\dfrac{z-y}{x-y}$, tehát

$$x+(y-x)g(t)=y+(x-y)g(1-t),$$

$$g(t)+g(1-t)=\frac{y-x}{y-x}=1.$$

Hasonlóan kapjuk $f(x,y,z)=f(x,z,y)$ figyelembevételével, hogy $x\neq z$ esetén

$$x+(y-x)\cdot g(t)=f(x,y,z)=f(x,z,y)=x+(z-x)g\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$g(t)=t\cdot g\left(\frac{1}{t}\right).$$

A g függvény tehát kielégíti a

$$\begin{aligned} g(t)+g(1-t)&=1 \qquad (\text{minden } t\in\mathbb{R}),\\ g(t)&=t\cdot g\left(\frac{1}{t}\right) \qquad (\text{minden } 0\neq t\in\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{2}$$

egyenleteket. Vegyük észre, hogy másrészt g – mint láttuk – meghatározza f-et:

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x+(y-x)\cdot g\left(\dfrac{z-x}{y-x}\right), & \text{ha } \ x\neq y\\[2ex] x+(z-x)\cdot g\left(\dfrac{y-x}{z-x}\right), & \text{ha } \ x\neq z\\ x, & \textit{ha}\ \mathrm{x=y=z}, \end{cases} \tag{3}$$

és könnyen ellenőrizhető, hogy ha egy *tetszőleges* g függvény kielégíti a (2) összefüggéseket, akkor a (3) szerint belőle (vissza)kapott f teljesíti (1)-et. (Nem okoz ellentmondást az, ahogy $y \neq x \neq z$ esetén $f(x, y, z)$ értékét eredetileg értelmeztük, mivel a (2) teljesülése miatt ezek ugyanazt adják.) Ezek szerint a továbbiakban elegendő a (2) követelményt teljesítő g függvényeket meghatározni. Előbb azonban következzék egy kis kitérő.

2. Transzformációcsoportok

Legyen H egy halmaz, és tegyük fel, hogy értelmezett rajta egy (pl. „szorzással” vagy az elemek puszta egymás után írásával jelölt) *művelet:* minden $a, b \in H$-ra $a \cdot b$ (egyszerűbben: ab) is egy jól meghatározott eleme a H-nak. Tegyük fel, hogy van olyan e elem a H-ban, hogy minden $a \in H$-ra $ea = ae = a$ teljesül; ilyenkor azt mondjuk, hogy e *egységeleme* a H-nak. Tételezzük fel továbbá, hogy a H minden c eleméhez létezik olyan c' elem, amelyre $cc' = c'c = e$; az ilyen c' elemet a c *inverzének* hívjuk. Ha mindezeken túl a H-n értelmezett művelet még *asszociatív* is, azaz teljesíti (minden $a, b, c \in H$-ra) az $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ azonosságot, akkor azt mondjuk, hogy H *csoport erre a műveletre.*

A csoportok nagyon sok helyen fordulnak elő a matematikában; már tanulmányaink legelején is találkozhatunk velük, hiszen például az egész számok halmaza csoport az egész számok összeadásának műveletére. Ugyanígy csoportot alkotnak a nemnulla valós számok a valós számok szorzására, stb. Ezeknél a „számtanos” példáknál azonban sokkal fontosabb és jellemzőbb példa csoportra az, amikor a csoport elemei nem számok, hanem egy halmaz bizonyos tulajdonságú *leképezései,* a köztük értelmezett művelet pedig a leképezések egymás után alkalmazása, azaz *kompozíciója.*

1. példa. Legyen X tetszőleges halmaz, és jelölje H az összes $X \to X$ *bijektív* leképezések halmazát. (Egy $f\colon X \to X$ leképezés bijektív, ha minden $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$, valamint az X halmaz minden eleme az f-nél vett képe egy-egy alkalmas X-beli elemnek: (minden $x \in X$) (van olyan $y \in X$) $f(y) = x$. Mivel az f különböző elemeket különböző elemekbe képez, azért látható, hogy minden $x \in X$-hez *pontosan egy* olyan $y \in X$ található, amelyre $f(y) = x$.) Könnyen látható, hogy két bijektív leképezésnek a kompozíciója is bijektív, és az is egyszerűen igazolható, hogy a leképezések kompozíciója asszociatív művelet. Jelölje ε az X halmaz identikus leképezését $\big((\forall x \in X)\ \varepsilon(x) = x\big)$; ekkor tetszőleges $f\colon X \to X$ leképezésre és $x \in X$-re

$$\varepsilon\big(f(x)\big) = f(x) = f\big(\varepsilon(x)\big),$$

azaz $\varepsilon \circ f = f \circ \varepsilon = f$. Ez azt jelenti, hogy ε egységeleme a H-nak a kompozíció ($\circ$-rel jelölt) műveletére. Végül, ha $f\colon X \to X$ bijektív leképezés, akkor definiáljuk az f' leképezést X-en a következőképpen: minden $x \in X$-hez van pontosan egy olyan $y \in X$, amelyre $f(y) = x$; legyen $f'(x) = y$. Ebből egyszerűen belátható, hogy $f \circ f' = \varepsilon = f' \circ f$, vagyis f' az f inverze, és f' is bijektív. Tehát H csoport a kompozíció műveletére.

2. példa. Tekintsük a következő függvényeket: $\varepsilon\colon x \mapsto x$, $\sigma\colon x \mapsto 1 - x$, $\theta\colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $\alpha\colon x \mapsto \dfrac{x-1}{x}$, $\beta\colon x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$, $\gamma\colon x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Ekkor

$$\sigma \circ \theta\colon x \mapsto 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$$

így $\sigma \circ \theta = \alpha$. Hasonlóan például

$$\beta \circ \beta\colon x \mapsto \frac{\beta(x)}{\beta(x) - 1} = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x - (x-1)} = x,$$

tehát $\beta \circ \beta = \varepsilon$. Folytatva ezt a számolást belátható, hogy a $G = \{\varepsilon, \theta, \sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$ halmazba tartozó bármely két függvény kompozíciója is a G-hez tartozik. A számolás eredményeit a következő „szorzótábla” foglalja össze (bekereteztük a két, imént részletezett „szorzás” eredményét).

$\circ$	ε	θ	σ	α	β	γ
ε	ε	θ	σ	α	β	γ
θ	θ	ε	γ	β	α	σ
σ	σ	$\boxed{\alpha}$	ε	θ	γ	β
α	α	σ	β	γ	θ	ε
β	β	γ	α	σ	$\boxed{\varepsilon}$	θ
γ	γ	β	θ	ε	σ	α

Mivel leképezések kompozíciója asszociatív, azért a kompozíció a G halmazon is asszociatív művelet. Egységelem is van, az ε. A táblázatból leolvasható, hogy α és γ egymás inverzei, míg ε, θ, σ és β önmaguk inverzei; tehát G csoport a függvénykompozíció (az összetett függvény képzése) műveletére.

3. Orbit és transzverzális. Tegyük föl, hogy X egy halmaz, és H az X bizonyos, önmagára történő leképezéseinek a halmaza úgy, hogy e leképezések csoportot alkotnak a kompozíció műveletére; tegyük fel továbbá azt is, hogy H egységeleme az ε identikus leképezés (ez mindkét példánkban teljesült). Jelölje x az X halmaz tetszőleges elemét. Az x *orbitjának* nevezzük az X azon elemeinek az összességét, amelyeket megkaphatunk x-nek valamelyik H-beli leképezésnél vett képeként; ez éppen az $\{\eta(x) \mid \eta \in H\}$ halmaz.

Mit mondhatunk két orbit viszonyáról? Tekintsük ehhez két tetszőleges elem, x és y orbitját. Ha ezeknek nincs közös elemük, akkor persze y nem eleme az x orbitjának, csakúgy, mint x sem az y-énak. Ez azt jelenti, hogy ilyenkor nincs olyan H-beli leképezés, amely x-et y-ba képezné, és olyan sem, ami az y-t képezné x-be. A másik lehetséges eset az, hogy x és y orbitjának létezik közös eleme, pl. z. Ekkor van olyan η_1 és $\eta_2 \in H$, hogy $\eta_1(x) = z$, $\eta_2(y) = z$. Jelölje η_2 inverzét az η'; ekkor $y = \varepsilon(y) = \eta'\big(\eta_2(y)\big) = \eta'(z)$, így $\eta'\big(\eta_1(x)\big) = \eta'(z) = y$, azaz $\eta' \circ \eta_1$ az x-et y-ba képezi: y tehát benne van az x orbitjában. Ekkor azonban az y orbitja:

$$\{\xi(y) \mid \xi \in H\} = \{\xi\big([\eta' \circ \eta_1](x)\big) \mid \xi \in H\} = \{[\xi \circ \eta' \circ \eta_1](x) \mid \xi \in H\} \subseteq$$

$$\subseteq \{\zeta(x) \mid \zeta \in H\}.$$

Azt kaptuk, hogy y orbitja része az x orbitjának. Ugyanígy látható be az is, hogy az x orbitja része az y orbitjának, tehát a két orbit egyenlő. Ezzel beláttuk, hogy *két orbit vagy egyenlő egymással, vagy diszjunktak.*

Egy, az orbithoz szorosan kapcsolódó fogalom a transzverzális. Az X egy részhalmazát *transzverzálisnak* nevezzük, ha minden orbitból pontosan egy elemet tartalmaz.

Nézzük meg, mik az orbitok és a transzverzálisok két korábbi példánkban. Az első példában egyetlen orbit van: maga az egész X halmaz, hiszen minden $x, y \in X$-re van (általában nem is egy) olyan bijektív leképezés, ami x-et y-ba képezi. Így az X bármelyik eleme egy transzverzális.

Sokkal érdekesebb a 2. példa esete. Ha r egy valós szám, és mind a hat G-beli függvény értelmezve van r-ben, akkor r orbitja, $\{h(r) \mid h \in G\}$ legfeljebb hat számból áll. Mivel minden olyan valós szám, amin G elemei értelmezettek eleme egy orbitnak, az orbitok száma ezúttal végtelen. (A 0 és az 1 az a két szám, ahol függvényeink némelyike nincs értelmezve; ezeket egyelőre figyelmen kívül hagyjuk.)

Megmutatjuk, hogy ha a G-beli függvényeket csak a 0-tól és 1-től különböző valós számokon értelmezzük, akkor a $[2, +\infty)$ félegyenes pontjai transzverzálist alkotnak. Ehhez tekintsük a következő, egyszerűen belátható egyenlőtlenségeket:

$$r > 2 \Rightarrow \begin{cases} \sigma(r) = 1 - r < -1 \Rightarrow \sigma\big((2, +\infty)\big) = (-\infty, -1) \\[2ex] -1 < \gamma(r) = \dfrac{1}{1-r} < 0 \Rightarrow \gamma\big((2, +\infty)\big) = (-1, 0) \\[2ex] 0 < \theta(r) = \dfrac{1}{r} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta\big((2, +\infty)\big) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{1}{2} < \alpha(r) = \dfrac{r-1}{r} < 1 \Rightarrow \alpha\big((2, +\infty)\big) = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \\[2ex] 1 < \beta(r) = \dfrac{r}{r-1} < 2 \Rightarrow \beta\big((2, +\infty)\big) = (1, 2). \end{cases}$$

Leolvasható, hogy minden, a 0-tól, 1-től, (-1)-től, $\dfrac{1}{2}$-től és 2-től különböző szám előáll pontosan egy $(2, +\infty)$-beli számnak (pontosan) egy G-beli függvény szerinti értékeként. Mivel a kimaradt $-1, \dfrac{1}{2}, 2$ számok egy orbitot alkotnak (ez az egyetlen háromelemű orbit), beláttuk, hogy $[2, +\infty)$ valóban transzverzális.

3. A függvényegyenletek megoldása

Fogalmazzuk meg a (2)-ben szereplő egyenleteket a G csoportot alkotó függvényeknek a nyelvén: az első egyenlet azt jelenti, hogy

(4)
$$g\big(\sigma(t)\big) = \sigma\big(g(t)\big) = 1 - g(t),$$

a második pedig azt, hogy

(5)
$$g\big(\theta(t)\big) = \frac{g(t)}{t}.$$

A G-beli művelet segítségével (4)–(5) következményeként kapjuk, hogy

$$(6)\qquad g\big(\alpha(t)\big)=g\Big(\sigma\big(\theta(t)\big)\Big)=\sigma\Big(g\big(\theta(t)\big)\Big)=1-\frac{g(t)}{t},$$

$$(7)\qquad g\big(\beta(t)\big)=g\Big(\theta\big(\alpha(t)\big)\Big)=\frac{g\big(\alpha(t)\big)}{\alpha(t)}=\frac{1-\dfrac{g(t)}{t}}{\dfrac{t-1}{t}}=\frac{t-g(t)}{t-1},$$

$$(8)\qquad g\big(\gamma(t)\big)=g\Big(\theta\big(\sigma(t)\big)\Big)=\frac{g\big(\sigma(t)\big)}{\sigma(t)}=\frac{1-g(t)}{1-t}.$$

A g-re megkövetelt egyenletek tehát kizárólag az azonos orbithoz tartozó helyeken fölvett értékekre írnak elő bizonyos összefüggéseket. Másrészt az is kiderült, hogy ha ismerjük a g függvény értékét egy $t\neq 0,1$ helyen, akkor ez (4-8) alapján már egyértelműen meghatározza a g értékét a t orbitjába tartozó helyeken. Az előző részben láttuk, hogy ha $r\neq -1,0,\frac{1}{2},1,2$, akkor pontosan egy olyan $t\in(2,+\infty)$ és $\eta\in G$ létezik, amelyre $r=\eta(t)$. Tehát g értékeit tetszés szerint megadhatjuk a $(2,+\infty)$ félegyenesen, ezekből (4)–(8) szerint ellentmondástól mentesen megkapjuk g értékeit mindenhol, kivéve a -1, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2 helyeket. Az így kapott függvényre – megadásának módjából következően – nyilvánvalóan teljesülnek a (4)–(8) összefüggések, tehát az ezekkel ekvivalens (2) egyenletek is. A $\left\{-1,2,\frac{1}{2}\right\}$ orbit valamelyik helyén, pl. 2-ben azonban már nem írható elő tetszés szerint a g értéke. Ennek az az oka, hogy $\beta(2)=2$, így, ha $g(2)=s$, akkor (7) szerint

$$s=g(2)=g\big(\beta(2)\big)=\frac{2-g(2)}{2-1}=2-s,$$

amiből $g(2)=s=1$, így (5) és (8) szerint

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=g\big(\theta(2)\big)=\frac{g(2)}{2}=\frac{1}{2},\quad \text{és}\quad g(-1)=g\big(\gamma(2)\big)=\frac{1-g(2)}{1-2}=0.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezekkel az értékekkel már teljesül (2) a $t=-1,\frac{1}{2},2$ helyeken is. A még fennmaradt $t=0,1$ helyeken a (2) követelmény csupán $g(0)+g(1)=1$ teljesülését kívánja, ezért ha egy tetszés szerint megválasztott v számmal $g(0)=v$, akkor $g(1)=1-v$ megfelelő.

A (2) egyenletrendszer megoldása tehát a következő. Legyen h tetszőleges, a $(2,+\infty)$ félegyenesen értelmezett függvény, v pedig valós szám. Ekkor, a G szorzótábláját is felhasználva:

$$g(t)=\begin{cases} g\big(\sigma\big(\sigma(t)\big)\big)=1-g\big(\sigma(t)\big)=1-h(1-t), & \text{ha } \ t<-1\\ 0, & \text{ha } \ t=-1\\ g\big(\gamma\big(\alpha(t)\big)\big)=\dfrac{1-g\big(\alpha(t)\big)}{1-\alpha(t)}=\dfrac{1-h\big(\frac{t-1}{t}\big)}{1-\frac{t-1}{t}}=t-t\cdot h\left(\dfrac{t-1}{t}\right), & \text{ha } \ -1<t<0\\ v, & \text{ha } \ t=0\\ g\big(\theta\big(\theta(t)\big)\big)=\dfrac{g\big(\theta(t)\big)}{\theta(t)}=\dfrac{h\big(\frac{1}{t}\big)}{\frac{1}{t}}=t\cdot h\left(\dfrac{1}{t}\right), & \text{ha } \ 0<t<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}, & \text{ha } \ t=\dfrac{1}{2}\\ g\big(\alpha\big(\gamma(t)\big)\big)=1-\dfrac{g\big(\gamma(t)\big)}{\gamma(t)}=1-\dfrac{h\big(\frac{1}{1-t}\big)}{\frac{1}{1-t}}=1+(t-1)\cdot h\left(\dfrac{1}{1-t}\right), & \text{ha } \ \dfrac{1}{2}<t<1\\ 1-v, & \text{ha } \ t=1\\ g\big(\beta\big(\beta(t)\big)\big)=\dfrac{\beta(t)-g\big(\beta(t)\big)}{\beta(t)-1}=\dfrac{\frac{t}{t-1}-h\big(\frac{t}{t-1}\big)}{\frac{t}{t-1}-1}=t+(1-t)\cdot h\left(\dfrac{t}{t-1}\right), & \text{ha } \ 1<t<2\\ 1, & \text{ha } \ t=2\\ h(t), & \text{ha } \ t>2. \end{cases}$$

Az eredeti feladatban szereplő f függvényt innen a (3) szerint kaphatjuk meg.