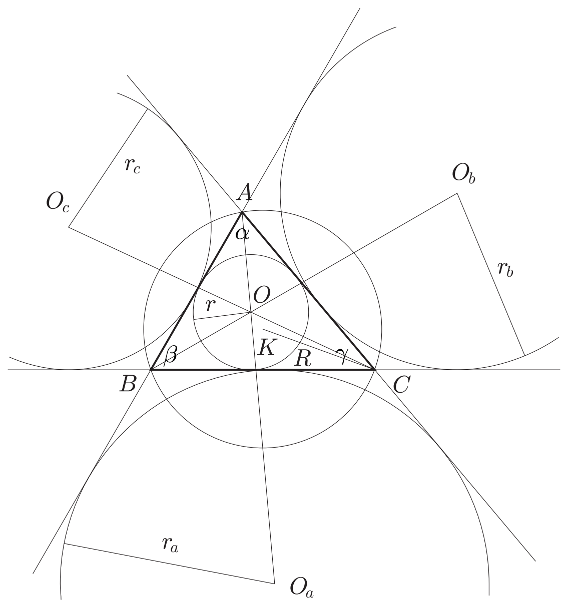
A lapunkban megjelenő feladatok mintamegoldásainak írása közben sokszor jelent problémát annak eldöntése, hogy egy állítás közismert-e, s ezért nem kell bizonyítani, vagy pedig nem az, és ezért a bizonyítását is le kell írni. Különösen így volt ez a **B. 3478.** feladatnál, amit nagyon sokféleképpen lehetett megoldani.

E cikknek az a célja, hogy a háromszögekkel kapcsolatos néhány állítás egyszerű bizonyításait összegyűjtse. A háromszögekkel kapcsolatban rengeteg tétel van, mi csak azokkal foglalkozunk, amelyek kapcsolódnak a háromszöghöz tartozó körökhöz. Ezeknek is csak egy részét ismertetjük, egyáltalán nem foglalkozunk pl. a *Feuerbach körrel.* Az érdeklődő olvasó további szép tételeket találhat az irodalomjegyzékben szereplő könyvekben.

A háromszögben a három oldal, csúcs, szög stb. szerepe szimmetrikus. Ezért állításainkban és bizonyításainkban a rövidség kedvéért sokszor csak $a, A, \alpha, \ldots$ szerepel. Ezeket persze úgy kell érteni, hogy a háromszög tetszőleges oldalára, csúcsára, szögére igaz a megfelelő állítás.

Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C, oldalai a, b, c, szögei α, β, γ, a szokásos jelölésekkel a háromszög területét jelölje T, kerületét $2s$, a beírható kör sugara legyen r, a hozzáírt körök sugarai r_a, r_b, r_c, a háromszög köré írható kör sugara R, végül ezen körök középpontjai legyenek rendre O, O_a, O_b, O_c és K (*1. ábra*).

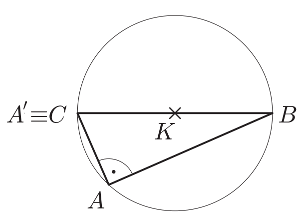


1. ábra

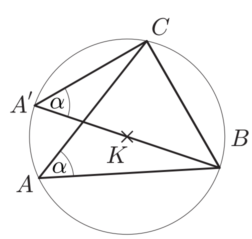
Első állításunkat *általánosított szinusztételnek* is szokás nevezni.

1. állítás. $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha} = \dfrac{b}{2\sin\beta} = \dfrac{c}{2\sin\gamma}$.

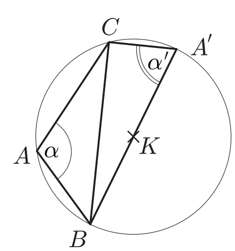
Bizonyítás. Messe a háromszög köré írható körének BK átmérője a kört másodszor az A' pontban. Ekkor $BA' = 2R$. Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor $A' \equiv C$, az állítás nyilvánvaló (*2/1. ábra*). Ha α nem derékszög, akkor $BA'C\sphericalangle = \alpha$ (*2/2. ábra*), vagy $BA'C\sphericalangle = \alpha' = 180^\circ - \alpha$ (*2/3. ábra*), de felhasználva a $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ összefüggést, valamint azt, hogy a $BA'C$ háromszög C-nél lévő szöge Thalész tétele miatt derékszög, mindig teljesül, hogy $\sin\alpha = \dfrac{BC}{BA'} = \dfrac{a}{2R}$.



2/1. ábra



2/2. ábra



2/3. ábra

2. állítás. $R = \dfrac{abc}{4T}$.

Bizonyítás. Az ismert területképlet szerint $T = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$. Ezért ha az előző állításban belátott $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ összefüggés jobb oldalán lévő törtet $b \cdot c$-vel bővítjük, akkor éppen a bizonyítandó összefüggést kapjuk.

Ha a $T = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$ területképletben az oldalakat kifejezzük az 1. állításból adódó $2R\sin\beta$-val, illetve $2R\sin\gamma$-val, akkor a következőt kapjuk:

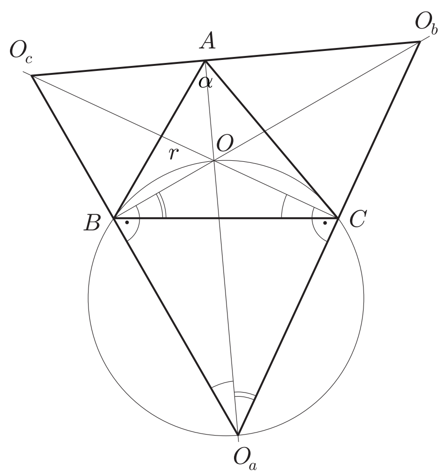
3. állítás. $T = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

Tudjuk, hogy O a háromszög három belső szögfelezőjének, O_a, O_b és O_c pedig két-két külső- és egy-egy belső szögfelezőjének a metszéspontja. Mivel a háromszög bármely csúcsához tartozó külső és belső szögfelező merőleges egymásra, ezért igaz a következő:

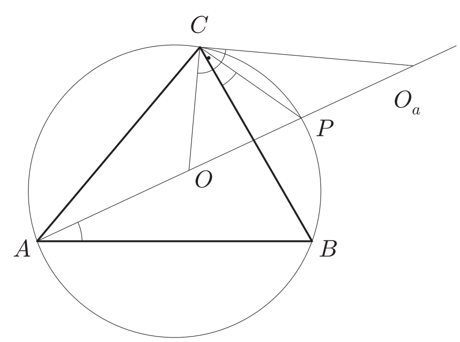
4. állítás. *Az $O_aO_bO_c$ háromszög magasságpontja O, magasságvonalai pedig megegyeznek az ABC háromszög belső szögfelezőivel.*

Ebből következik, hogy az OBO_aC négyszög húrnégyszög, mert B-nél és C-nél lévő szögei egyaránt derékszögek. A négyszöget az OO_a átló két közös átfogójú derékszögű háromszögre bontja, ezért a négyszög köré írható kör középpontja az OO_a szakasz felezőpontja. A négyszög köré írt kört megrajzolva (*3. ábra*) látszik, hogy $OCB\sphericalangle = OO_aB\sphericalangle$ és $OBC\sphericalangle = OO_aC\sphericalangle$, mert az egy íven nyugvó kerületi szögek egyenlőek. Vagyis $BO_aC\sphericalangle = OO_aB\sphericalangle + OO_aC\sphericalangle = \dfrac{\gamma}{2} + \dfrac{\beta}{2}$. Ezzel bebizonyítottuk a következőt:

5. állítás. *Az $O_aO_bO_c$ háromszög szögei rendre:* $\dfrac{\beta+\gamma}{2}$, $\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$ *és* $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.



3. ábra



4. ábra

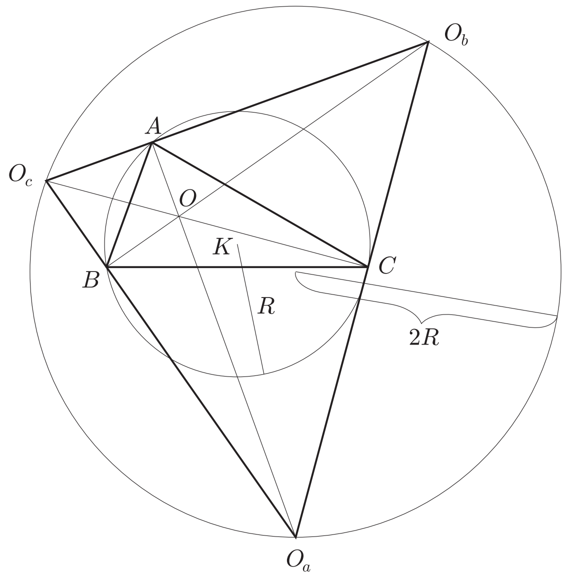
Következő állításunk az eddigieknél kevésbé ismert (bár megtalálható a *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* kötetében).

6. állítás. *A háromszög köré írható kör felezi a beírható kör középpontját a hozzáírható körök középpontjaival összekötő szakaszokat.*

Bizonyítás. Messe a köré írható kör az OO_a szakaszt P-ben (*4. ábra*). (Mivel $CO_aB\sphericalangle = \dfrac{\beta+\gamma}{2} < 180^\circ - \alpha = 180^\circ - CAB\sphericalangle$, ezért O_a a köré írható körön kívül helyezkedik el, vagyis P mindig létrejön.) Ekkor $PCB\sphericalangle = PAB\sphericalangle$, mert mindkettő a PB ívhez tartozó kerületi szög. Ezért $PCO\sphericalangle = PCB\sphericalangle + BCO\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$. Az OCO_a háromszögben C-nél derékszög van, az O_a-nál lévő szögről már láttuk, hogy $\dfrac{\beta}{2}$, ezért az O-nál lévő szög $90^\circ - \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$. Vagyis $POC\sphericalangle = PCO\sphericalangle$, tehát a POC háromszög egyenlő szárú, $PO = PC$. Ugyanígy láthatjuk be, hogy $PO = PB$. Ez azt jelenti, hogy az OBC háromszög köré írható kör középpontja P. Ez a kör azonban megegyezik az OBO_aC húrnégyszög köré írható körrel, hiszen mindkét sokszögnek csúcsa O, B és C. Azt viszont a 4. állítás után beláttuk, hogy az OBO_aC köré írható kör középpontja az OO_a szakasz felezőpontja. Tehát P felezi OO_a-t.

7. állítás. *A hozzáírt körök középpontjai által meghatározott háromszög köré írható körének sugara $2R$.*

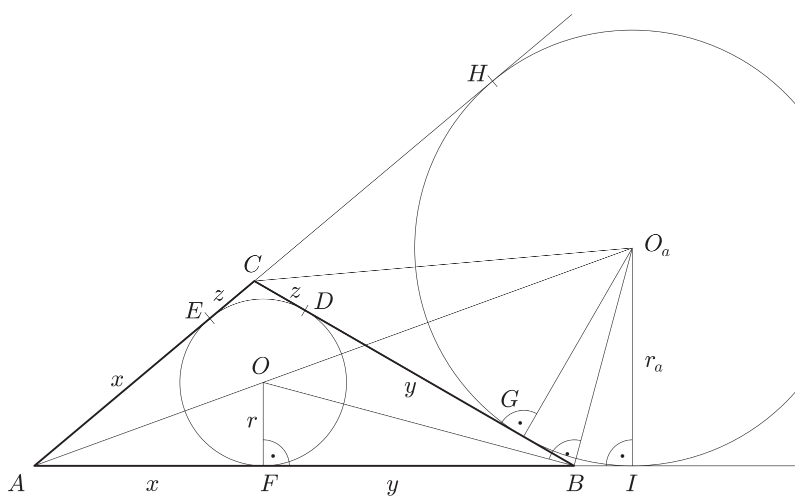
Bizonyítás. Ha az O pontból kétszeresére nagyítjuk a köré írható kört, akkor a keletkezett $2R$ sugarú kör az 5. állítás miatt átmegy az O_a, O_b és O_c pontok mindegyikén (*5. ábra*).



5. ábra

(A 6. és 7. állításokat a fentieknél egyszerűbben beláthatja az, aki ismeri a *Feuerbach-kör* tulajdonságait – lásd pl. [2], 69–70. oldal –, a 3. állításból ugyanis következik, hogy az $O_aO_bO_c$ háromszög Feuerbach-köre megegyezik az ABC háromszög körülírt körével. Ebből pedig nemcsak 6. és 7. következik, hanem az is, hogy *a körülírt kör felezi a hozzáírt körök középpontjai által meghatározott szakaszokat.*)

A továbbiakban a beírt és a hozzáírt körök sugarait fejezzük ki az oldalakkal és a területtel. Ehhez először meghatározzuk ezen körök és az oldalegyenesek érintési pontjainak a háromszög csúcsaitól való távolságát. Jelöljük az érintési pontokat a *6. ábrán* látható módon D, E, F, G, H, I-vel. Mivel egy külső pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz hossza egyenlő, ezért $AH = AI$, $BG = BI$ és $CH = CG$, továbbá a *6. ábra* jelöléseinek megfelelően $AE = AF = x$, $BD = BF = y$ és $CD = CE = z$.



6. ábra

Az $x + y = c$, $y + z = a$ és $z + x = b$ összefüggésekből következik, hogy $2x + 2y + 2z = a + b + c = 2s$, azaz $x + y + z = s$, és így

$$x = s - a, \qquad y = s - b, \qquad z = s - c. \tag{1}$$

A hozzáírt körhöz húzott érintőszakaszokra pedig

$$2AH = AH + AI = (AC + CG) + (AB + BG) = AC + AB + BC = 2s,$$

tehát

$$AH = AI = s, \qquad BG = BI = s - c, \qquad CH = CG = s - b. \tag{2}$$

8. állítás. $T = r \cdot s = r_a(s - a) = r_b(s - b) = r_c(s - c)$.

Bizonyítás. Az ABC háromszög területe megegyezik az OAB, OBC és OCA háromszögek területének összegével. E három háromszög O-hoz tartozó magasságai r hosszúak, így területeik rendre $\frac{c \cdot r}{2}$, $\frac{a \cdot r}{2}$ és $\frac{b \cdot r}{2}$. Ezeket összeadva kapjuk, hogy $T = r \cdot s$.

A hozzáírt kör esetén azt kell felhasználnunk, hogy az ABC háromszög területe megegyezik az O_aAB és O_aCA háromszögek területei összegének és az O_aBC háromszög területének különbségével, azaz

$$T = \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2} = r_a(s-a).$$

9. állítás. *A beírt kör sugarának reciproka megegyezik a hozzáírt körök sugarának reciprokösszegével.*

Bizonyítás. A 8. állítás szerint

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{s-a}{T} + \frac{s-b}{T} + \frac{s-c}{T} = \frac{3s-(a+b+c)}{T} = \frac{s}{T} = \frac{1}{r}.$$

10. állítás (Héron képlete)**.** $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Bizonyítás. A *6. ábrán* látható OBF és BO_aI háromszögek hasonlóak, mert F-nél illetve I-nél derékszögük van, a külső és a belső szögfelezők merőlegessége miatt pedig $OBF\sphericalangle$ és $BO_aI\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek. Ezért a két háromszög megfelelő oldalainak aránya megegyezik:

$$\frac{OF}{FB} = \frac{BI}{IO_a}.$$

Ezt (1), (2) és a 8. állítás felhasználásával átalakítva:

$$\frac{r}{s-b} = \frac{s-c}{r_a}, \quad \text{azaz} \quad (s-b)(s-c) = r \cdot r_a = \frac{T}{s} \cdot \frac{T}{s-a},$$

amiből $T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ adódik.

11. állítás. $4R = r_a + r_b + r_c - r$.

Bizonyítás. A 2. és a 8. állítás alapján elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$\frac{abc}{T} = \frac{T}{s-a} + \frac{T}{s-b} + \frac{T}{s-c} - \frac{T}{s}. \tag{3}$$

Mindkét oldalt T-vel szorozva és felhasználva Héron képletét:

$$abc = s(s-b)(s-c) + s(s-a)(s-c) + s(s-a)(s-b) - (s-a)(s-b)(s-c). \tag{4}$$

Ez az egyenlőség a jobb oldal átalakításával könnyen belátható:

$$\big[s-(s-a)\big](s-b)(s-c) + s(s-a)\big[(s-c)+(s-b)\big] =$$

$$= a \cdot \frac{1}{4}\big(a^2 - (b-c)^2\big) + \frac{1}{4}\big((b+c)^2 - a^2\big) \cdot a = \frac{1}{4} a \cdot 4bc = abc.$$

Vagyis (4), s így a vele ekvivalens (3) is igaz.

12. állítás. *A háromszög köré írható kör sugara legalább kétszerese a beírható kör sugarának.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy $R \geq 2r$, vagyis a 2. és 8. állításokat felhasználva azt, hogy

$$\frac{abc}{4T} \geq 2 \cdot \frac{T}{s}. \tag{5}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $T/2$-vel, alkalmazzuk Héron képletét és egyszerűsítsünk a jobb oldalon s-sel:

$$\frac{abc}{8} \geq (s-a)(s-b)(s-c).$$

Írjuk át a bizonyítandó egyenlőtlenséget az (1) összefüggéseket felhasználva az x, y, z változókra:

$$\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{8} \geq x \cdot y \cdot z.$$

Ez viszont azonnal adódik a számtani és mértani közepek közti

$$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}, \quad \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx} \quad \text{és} \quad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

egyenlőtlenségek összeszorzásából. Ezért az ezzel ekvivalens (5) egyenlőtlenség is teljesül. Az is látható, hogy egyenlőség csak akkor van, ha $x = y = z$, azaz ha a háromszög szabályos.

Héron képletét valamint a számtani és a mértani közepek közti egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \le s\left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = s \cdot \frac{s^3}{27} = \frac{s^4}{27}. \tag{6}$$

Vagyis minden háromszögben igaz, hogy $12\sqrt{3} \le \dfrac{(2s)^2}{T}$, azaz a kerület négyzetének és a területnek a hányadosa alulról korlátos. Ez a tört minimális értékét akkor veszi fel, ha (6)-ban egyenlőség van, tehát amikor a háromszög szabályos. Ebből azonnal adódik a következő két, szélsőértékekre vonatkozó állítás.

13. állítás. *Adott területű háromszögek közül a szabályosnak a legkisebb a kerülete.*

14. állítás. *Adott kerületű háromszögek közül a szabályosnak a legnagyobb a területe.*

A továbbiakban a háromszög szögeinek és félszögeinek szögfüggvényeit fejezzük ki az oldalakkal majd ezeknek a képleteknek néhány alkalmazását mutatjuk meg.

15. állítás.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Bizonyítás. A *6. ábrán* látható AFO derékszögű háromszög A-nál lévő szöge $\dfrac{\alpha}{2}$. Ezért a 8. állítást, Héron képletét és (1)-et felhasználva:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{OF}{AF} = \frac{r}{x} = \frac{T}{sx} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s(s-a)} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Az AFO háromszögben Pitagorasz tétele szerint

$$AO^2 = AF^2 + OF^2 = (s-a)^2 + \frac{T^2}{s^2} = \frac{s-a}{s}\big[s(s-a) + (s-b)(s-c)\big] =$$

$$= \frac{s-a}{4s}\Big[\big((b+c)^2 - a^2\big) + \big(a^2 - (b-c)^2\big)\Big] = bc\frac{s-a}{s}.$$

Ennek ismeretében a tangenshez hasonlóan kifejezhetjük $\dfrac{\alpha}{2}$ szinuszát és koszinuszát is:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OF}{AO} = \frac{T}{s \cdot AO} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s \cdot \sqrt{bc\dfrac{s-a}{s}}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \tag{7}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AF}{AO} = \frac{s-a}{\sqrt{bc\dfrac{s-a}{s}}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}. \tag{8}$$

Ezekből a $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$ és a $\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ trigonometrikus azonosságokat felhasználva kapjuk, hogy

$$\sin\alpha = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \frac{2T}{bc},$$

ami az ismert területképlet átrendezett alakja, valamint hogy

$$\cos\alpha = \frac{s(s-a)}{bc} - \frac{(s-b)(s-c)}{bc} = \frac{1}{4bc}\Big[\big((b+c)^2 - a^2\big) - \big(a^2 - (b-c)^2\big)\Big] =$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \text{ami a koszinusztétel egy átrendezett alakja.}$$

A tangenseket (feltéve, hogy a szög nem derékszög), a $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ azonosság alapján kifejezve egy kevésbé ismert összefüggést kapunk:

$$4T = \operatorname{tg}\alpha(b^2+c^2-a^2) = \operatorname{tg}\beta(a^2+c^2-b^2) = \operatorname{tg}\gamma(a^2+b^2-c^2). \tag{9}$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{b^2+c^2-a^2}{4T} + \frac{a^2+c^2-b^2}{4T} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4T} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4T}.$$

Következő állításunk már nem ilyen nyilvánvaló.

16. állítás. *Ha a háromszög nem derékszögű, akkor*

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma.$$

Bizonyítás. Felhasználva (9)-et, azt kell megmutatnunk, hogy

$$\frac{4T}{b^2+c^2-a^2}+\frac{4T}{a^2-b^2+c^2}+\frac{4T}{a^2+b^2-c^2}=$$

$$=\frac{64T^3}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}.$$

Ha a háromszög nem derékszögű, akkor ez ekvivalens a nevezőkkel való szorzás és $4T$-vel való osztás után kapott

$$(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)+(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)=16T^2$$

összefüggéssel. A jobb oldalra beírva Héron képletét és mindkét oldalt rendezve:

$$(a^2+b^2-c^2)\cdot 2c^2+(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)=\left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right].$$

Átalakítva:

$$2c^2\left[(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)\right]+(b^2+c^2-a^2)(a^2-b^2-c^2)=$$

$$=(b^2+c^2-a^2+2bc)(a^2-b^2-c^2+2bc),$$

$$4b^2c^2+(b^2+c^2-a^2)(a^2-b^2-c^2)=$$

$$(b^2+c^2-a^2)(a^2-b^2-c^2)+2bc\left[(b^2+c^2-a^2)+(a^2-b^2-c^2)\right]+4b^2c^2.$$

Ez az azonosság bizonyítja állításunkat.

A 15. állítást, a (7) és (8) képleteket (és megfelelőiket $\frac{\beta}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$ szögfüggvényeire) valamint Héron képletét felhasználva triviális számolással kapjuk a következő azonosságokat.

17. állítás.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{T}{s^2},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{s^2}{T},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{T^2}{s\cdot abc},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s\cdot T}{abc},$$

Ezeket felhasználva sok egyenlőtlenség könnyen belátható, ezek közül egyet mutatunk meg példaként.

18. állítás. $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}$.

Bizonyítás. A 17. állítás alapján elegendő belátnunk, hogy

$$\frac{T^2}{s\cdot abc}\le\frac{1}{8},\quad\text{azaz}\quad\frac{T^2}{s}\le\frac{abc}{8}.$$

Héron képletét felhasználva ez $(s-a)(s-b)(s-c)\le\frac{abc}{8}$ alakba is írható. Ezt az egyenlőtlenséget viszont már beláttuk a 12. állítás bizonyítása során.

Irodalom

[1] Coxeter, H. S. M.: *A geometriák alapjai,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[2] Reiman I.: *A geometria és határterületei,* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.