A1. Tekintsünk egy S halmazt és a halmazon egy kétváltozós $*$ műveletet (ami azt jelenti, hogy bármely két S-beli a, b esetén $a*b$ is $S-$beli). Tegyük föl, hogy $(a*b)*a=b$ teljesül minden S-beli a, b-re. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a*(b*a)=b$ is teljesül minden S-beli a, b-re.

A2. Adottak az $E_1, E_2, \ldots, E_n$ érmék. Egyikük sem igazságos, a k-adikon a fej dobásának a valószínűsége $\dfrac{1}{2k+1}$. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az n darab érmét feldobva páratlan számú fejet kapunk? A választ adjuk meg az n racionális függvényeként.

A3. Adott m egész számra tekintsük a $P_m(x)=x^4-(2m+4)x^2+(m-2)^2$ polinomot. Az m milyen értékeire bomlik $P_m(x)$ két nem-konstans egész együtthatós polinom szorzatára?

A4. Az ABC háromszög területe egységnyi. Az E, F és a G pontok rendre a BC, CA, illetve AB oldalakon vannak úgy, hogy AE az R pontban felezi BF-et, BF az S pontban felezi CG-t, végül CG a T pontban felezi AE-t. Mekkora az RST háromszög területe?

A5. Bizonyítsuk be, hogy az $a^{n+1}-(a+1)^n=2001$ egyenlőség pontosan egy pozitív egész a, n számpárra teljesül.

A6. Lehet-e egy egységnyi sugarú kör belsejében lévő parabolaív hossza 4 egységnél nagyobb?

B1. Legyen n pozitív páros szám. Írjuk az $1, 2, \ldots, n^2$ számokat egy $n\times n$-es táblázat mezőibe úgy, hogy a táblázat k-adik sorában az elemek balról jobbra olvasva rendre

$$(k-1)n+1, \quad (k-1)n+2, \quad \ldots, \quad (k-1)n+n$$

legyenek $(k=1,2,\ldots,n)$.

Színezzük ki az így kitöltött táblázat mezőit piros és fekete színnel úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a mezők fele piros, a másik fele pedig fekete legyen. (A sakktábla-szerű színezés például egy lehetőség.) Bizonyítsuk be, hogy minden ilyen színezésre a piros és a fekete mezőkön lévő számok összege egyenlő.

B2. Melyek azok az (x, y) valós számok, amelyekre teljesül az alábbi egyenletrendszer?

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{2y}&=(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{2y}&=2(y^4-x^4). \end{aligned}$$

B3. Tetszőleges pozitív egész n számra jelölje $\langle n\rangle$ a $\sqrt{n}$-hez legközelebb eső egész számot. Mennyi a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\langle n\rangle}+2^{-\langle n\rangle}}{2^n}$$

összeg értéke?

B4. Jelölje S a $-1, 0, 1$ számoktól különböző racionális számok halmazát és legyen $f\colon S\to S$, $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$. Bizonyítsuk be, vagy cáfoljuk meg, hogy $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(S)=\emptyset$, ahol $f^{(n)}=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n}$.

B5. Legyenek a és b valós számok a $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ intervallumban, a g pedig olyan valós értékű függvény, amelyre $g\big(g(x)\big)=ag(x)+bx$ minden valós x-re. Bizonyítsuk be, hogy valamilyen c konstanssal $g(x)=cx$.

B6. Legyen az $(a_n)_{n\ge 1}$ pozitív tagú szigorúan monoton növő sorozat, amelyre $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$. Van-e ekkor végtelen sok pozitív egész n, amelyre teljesül, hogy $a_{n-i}+a_{n+i}<2a_n$, ha $i=1,2,\ldots,n-1$?