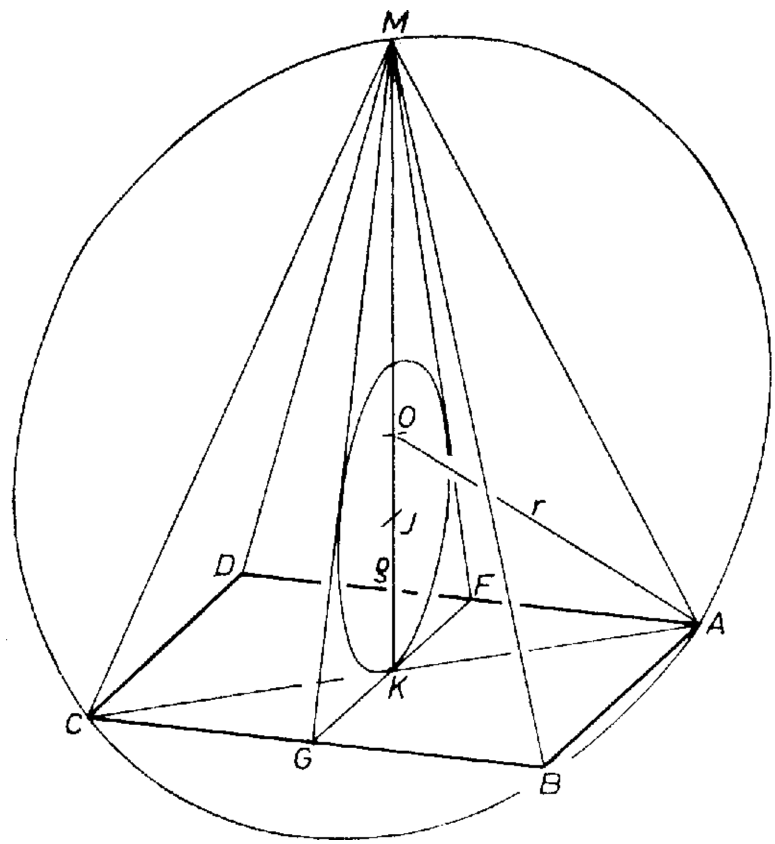

Legyen a gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, az ezzel szemben fekvő (fő) csúcsa M, az AD és BC él felezőpontja F, ill. G és FG felezőpontja K. Ekkor a körülírt gömb középpontja azonos az MAC átlós síkmetszet köré írt kör O középpontjával és sugara $r = OA$; másrészt hasonlóan – csupán más megfogalmazással – a beírt gömbből az MFG sík által kimetszett főkör az MFG háromszög beírt köre. Ennek középpontját J-vel jelölve a sugár $\varrho = JK$. Legyen még $AB = 1$, ekkor feladatunk a $KM = x$ magasságra annak az értéknek meghatározása, amelyre az $y = \dfrac{OA}{JK}$ hányados a legkisebb.

Mármost ismert összefüggések alapján, majd deriválással

$$r\left(=\frac{abc}{4t}\right)=\frac{\sqrt{2}\cdot MA^2}{2AC\cdot KM}=\frac{2x^2+1}{4x},$$

$$\varrho\left(=\frac{2t}{2s}\right)=\frac{FG\cdot KM}{1+2FM}=\frac{x}{1+\sqrt{4x^2+1}},$$

$$y=\frac{r}{\varrho}=\frac{2x^2+1}{4x^2}(1+\sqrt{4x^2+1})=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}\right)(1+\sqrt{4x^2+1}),$$

$$y'=-\frac{1}{2x^3}(1+\sqrt{4x^2+1})+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}\right)\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}=$$

$$=\frac{4x^4-2x^2-1-\sqrt{4x^2+1}}{2x^3\sqrt{4x^2+1}}.$$

A számláló 0, ha

$$4x^4-2x^2-1=\sqrt{4x^2+1},$$

amiből négyzetre emeléssel, majd mivel minket csak a valós, pozitív zérushely érdekel

$$4x^4(4x^4-4x^2-1)=0,\quad x_0=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\quad (=1{,}099).$$

Csak az x_0 helyen lehet szélső értéke a hányadosnak, ekkor

$$\sqrt{4x_0^2+1}=1+\sqrt{2}\quad \text{és}\quad y_0=1+\sqrt{2}\quad (=2{,}414).$$

Tekintsük függvényünk értékét az $x=1$ $(<x_0)$ és az $x=\sqrt{2}(>x_0)$ helyeken:

$$\frac{3(1+\sqrt{5})}{4}\quad (=2{,}427),\quad \text{ill.}\quad \frac{5}{2}\quad (=2{,}5),$$

mindkettő nagyobb, mint y_0, tehát x_0-ban az $\frac{r}{\varrho}$ hányadosnak minimuma van. x_0-ból a gúla minden egyéb mérete kiszámítható.

Horváth László (Csurgó, Csokonai Vitéz M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Az x_0 magasság mellett $r=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$, $\varrho=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}$, ezekből $r^2-\frac{1}{2}=\varrho^2$, $OA^2-KA^2=JK^2$, tehát a körülírt és a beírt gömb középpontja ekkor egybeesik.