1. A háromszög középvonalára vonatkozó tétel alkalmazásával adódik, hogy a négyszög átlóinak hossza 12 egység, az átlók szöge 30°, így a négyszög területe

$$T = \frac{12 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ}{2}, \quad T = 36 \text{ területegység.}$$

(Végtelen sok ilyen négyszög létezik.)

2. Az egyenlőtlenségben szereplő kifejezések akkor értelmezettek, ha

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad -2x^2 - 2x + 4 > 0 \quad \text{és} \quad 4 - 3x > 0.$$

Ez akkor teljesül, ha $0 < x < 1$.

Mivel a logaritmus alapszáma 0 és 1 között változik és a logaritmusfüggvény minden ilyen alapszámra szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$-2x^2 - 2x + 4 \leq 4 - 3x, \quad \text{azaz} \quad 2x\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldásai: $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

3. A feltételek és a koszinusztétel alkalmazásával $(a^2+b^2-c_1^2)+2ab = 2ab-\sqrt{2}ab$, $\big(a^2+b^2-(a^2+b^2-2ab\cos\gamma_1)\big) = 2ab-\sqrt{2}ab$, ahonnan $\cos\gamma_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma_1 = 135^\circ$, illetve $c_2^2-(a^2+b^2-2ab) = 2ab+\sqrt{2}ab$, $a^2+b^2-2ab\cos\gamma_2-a^2-b^2+2ab = 2ab+\sqrt{2}ab$, ahonnan $\cos\gamma_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma_2 = 135^\circ$, tehát $\gamma_1 = \gamma_2$, $c_1 = c_2$, a két háromszög egybevágó, így természetesen a területük egyenlő.

4. Vegyük észre, hogy

$$x + 4 + 2\sqrt{x+3} = (x+3) + 2\sqrt{x+3} + 1 = \left(\sqrt{x+3}+1\right)^2$$

és

$$2x + 3 - 4\sqrt{2x-1} = (2x-1) - 4\sqrt{2x-1} + 4 = \left(\sqrt{2x-1}-2\right)^2,$$

tehát

$$\left|\sqrt{x+3}+1\right| - \left|\sqrt{2x-1}-2\right| = 3,$$

azaz

$$\sqrt{x+3} - \left|\sqrt{2x-1}-2\right| = 2.$$

Az egyenlet akkor értelmezett, ha $x \geq \frac{1}{2}$.

Ha $\sqrt{2x-1} \geq 2$, $x \geq \frac{5}{2}$, akkor $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1}$, $x_1 = 4$ és ez valóban megoldás.

Ha $0 \leq \sqrt{2x-1} < 2$, azaz $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$, akkor $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4$, ahonnan $x_2 = 52 - 8\sqrt{39}$.

Az egyenlet megoldásai x_1 és x_2.

5. Alkalmazzuk a $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ valamint a $2\sin x\cos x = \sin 2x$ azonosságokat:

$$f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\big(1-\cos 2x-(1+\cos 2x)\big) + 3\sin 2x;$$
$$f(x) = 3\left(\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x\right);$$
$$f(x) = 6\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right).$$

Mivel $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ és $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, ezért

$$f(x) = 6\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$f(x)$ legnagyobb értéke 6, amit akkor vesz fel, ha $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = 1$, $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ legkisebb értéke -6, amit akkor vesz fel, ha $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Legyen a mértani sorozat négy tagja: a, aq, aq^2, aq^3. Ekkor a számtani sorozat négy egymást követő tagja: $a-1$, $aq+6$, aq^2+4, aq^3-4.

A számtani sorozat második tagjától bármely tagjának kétszerese egyenlő a szomszédos tagok összegével, így

$$a-1+aq^2+4=2(aq+6) \quad \text{és} \quad aq+6+aq^3-4=2(aq^2+4).$$

Ezekből $a(q-1)^2=9$, $aq(q-1)^2=6$, $q=\dfrac{2}{3}$, $a=81$. A négy szám: 80, 60, 40, 20.

7. Az E érintési pont abszcisszája, $3x_0-4\cdot 9=-45$, $x_0=-3$. Az e egyenes az x tengelyt az $A(-15;0)$ pontban metszi. A feltételeknek két kör felel meg, a körök az x tengelyt az F_1 és F_2 pontban érintik. Egy külső pontból a körhöz húzható érintőszakaszok egyenlősége miatt $AE=AF_1=AF_2$. $AE^2=12^2+9^2=15^2$, $AE=15$, tehát $AF_1=AF_2=15$, így $F_1(0,0)$, $F_2(-30,0)$. A keresett körök középpontjai rajta vannak a közös érintőre az E pontban merőleges egyenesen, valamint az $x=0$, illetve $x=-30$ egyenletű egyeneseken, így $u_1=0$, $u_2=-30$ és mivel $4x+3y=15$, ezért $v_1=5$, $v_2=45$. A körök egyenlete:

$$x^2+(y-5)^2=25 \quad \text{illetve} \quad (x+30)^2+(y-45)^2=2025.$$

Megjegyzés. A feladat sokféle módon oldható meg, paraméteresen, szögfelező alkalmazásával, trigonometria, illetve elemi geometria alkalmazásával.

8. Az egyenletnek akkor valósak a gyökei, ha az egyenlet diszkriminánsa nem negatív, azaz

$$4-4(a-1)^2\geq 0, \quad 1\geq (a-1)^2, \quad 1\geq |a-1|, \quad -1\leq a-1\leq 1, \quad 0\leq a\leq 2.$$

A gyökök összege, illetve szorzata: $x_1+x_2=2$, $x_1x_2=(a-1)^2$, így $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-2(a-1)^2$. Mivel $0\leq (a-1)^2\leq 1$, ezért $-2\leq -2(a-1)^2\leq 0$ és $2\leq 4-2(a-1)^2\leq 4$.

A gyökök négyzetösszegének legkisebb értéke 2, amit $a=0$ és a $a=2$ esetén vesz fel; a gyökök négyzetösszegének legnagyobb értéke 4, amit $a=1$ esetén vesz fel.