A dinnyeárusnak az a mániája, hogy görögdinnyéit, amelyek tökéletesen gömb alakúak, a vízszintes síklapú piaci kőasztalon az asztal hosszában egyenes sorba rakja úgy, hogy a sor belsejében mindegyik dinnye két szomszédjához ér hozzá, és azok a pontok, ahol a dinnyék az asztallaphoz érnek, egy egyenesen helyezkednek el.

Egy reggel, amikor kocsijában tizenegy gömb alakú dinnyével megérkezik a piacra, és még nem rakta ki azokat a maga módján, odamegy hozzá a piaci díjbeszedő és sorra megméri a dinnyék átmérőjét, amelyeket a következőknek talál: $d_1 = 16$ cm, $d_2 = 18$ cm, $d_3 = 22$ cm, $d_4 = 26$ cm, $d_5 = 28$ cm, $d_6 = 30$ cm, $d_7 = 34$ cm, $d_8 = 36$ cm, $d_9 = 38$ cm, $d_{10} = 40$ cm, $d_{11} = 42$ cm. Ezeket összeadja és közli, hogy az árusnak az átmérők összege, vagyis 330 cm után kell helyfoglalási díjat fizetnie. A dinnyeárus ezt nem fogadja el, mondván, hogy ő a dinnyéit az ő mániája szerint ennél rövidebb sorba tudja rendezni az asztalon. Számítsa ki a díjbeszedő a dinnyék méretének ismeretében, hogy milyen hosszú lesz a belőlük összeállítható legrövidebb dinnyesor, s akkor majd annyiért fizet. Erre a díjbeszedő azt mondja, látom, szereti a matematikát; nos jól van, én kiszámítom a legrövidebb dinnyesor hosszát, vagyis annak a síkbeli alakzatnak a kombinatorikus geometriai átmérőjét, amely a megfelelően elrendezett és egymást érintő dinnyék asztalra vett merőleges vetületeinek mint halmazoknak az uniója, ha ön viszont igazolja, hogy ez a hosszúság adott $r_1 \le r_2 \le r_3 \le \dots \le r_{n-1} \le r_n$ sugarú n darab dinnye esetén akkor a legkisebb, ha a

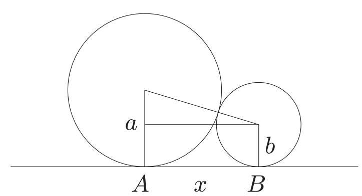
$$D = \left(\sqrt{r_{k_1}} - \sqrt{r_{k_2}}\right)^2 + \left(\sqrt{r_{k_2}} - \sqrt{r_{k_3}}\right)^2 + \left(\sqrt{r_{k_3}} - \sqrt{r_{k_4}}\right)^2 + \\ + \left(\sqrt{r_{k_4}} - \sqrt{r_{k_5}}\right)^2 + \dots + \left(\sqrt{r_{k_{n-1}}} - \sqrt{r_{k_n}}\right)^2$$

összeg a legnagyobb; ahol tehát $r_{k_1}, r_{k_2}, r_{k_3}, \dots, r_{k_{n-1}}, r_{k_n}$ az egyes, egymással érintkező dinnyék gömbsugarát jelöli, és ezen belül $k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-1}, k_n$ indexek az $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ számok egyik, a minimumot előállító, megfelelő permutációját jelentik. Segítsünk nekik!

Megoldás: A dinnyesor két szomszédos dinnyéjére az ábra szerint igaz, hogy az asztalon lévő érintkezési pontjaik távolsága $AB = x = 2\sqrt{ab}$, ahol a és b a két gömb sugara. Ennek alapján a feladatban meghatározott dinnyesor hossza:

$$L = r_{l_1} + 2\sqrt{r_{l_1} r_{l_2}} + 2\sqrt{r_{l_2} r_{l_3}} + 2\sqrt{r_{l_3} r_{l_4}} + 2\sqrt{r_{l_{n-1}} r_{l_n}} + r_{l_n},$$

ahol $r_{l_1}, r_{l_2}, r_{l_3}, \dots, r_{l_n}, r_{l_n}$ a dinnyék $r_1 \le r_2 \le r_3 \le \dots \le r_{n-1} \le r_n$ gömbsugarai valamilyen sorrendben.



A legrövidebb dinnyesorban a dinnyék úgy következnek egymás után, hogy a fenti összeg a legkisebb legyen.

Tekintsük a dinnyék átmérőinek összegét, amely legyen

$$H = 2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \dots + r_{n_1} + r_n).$$

Vonjuk ki a belőle a fentebb kapott L összeget:

$$2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \dots + r_{n-1} + r_n) - \\ - \left(r_{l_1} + 2\sqrt{r_{l_1} r_{l_2}} + 2\sqrt{r_{l_2} r_{l_3}} + 2\sqrt{r_{l_3} r_{l_4}} + \dots + 2\sqrt{r_{l_{n-1}} r_{l_n}} + r_{l_n}\right)$$

A kisebbítendő tagjait át lehet rendezni abba a sorrendbe, amilyen sorrendben a kivonandóban szerepelnek:

$$2(r_{l_1} + r_{l_2} + r_{l_3} + \dots + r_{l_{n_1}} + r_{l_n}) - \\ - \left(r_{l_1} + 2\sqrt{r_{l_1} r_{l_2}} + 2\sqrt{r_{l_2} r_{l_3}} + 2\sqrt{r_{l_3} r_{l_4}} + \dots + 2\sqrt{r_{l_{n-1}} r_{l_n}} + r_{l_n}\right)$$

A kivonás elvégzése utána a maradék:

$$D = H - L = r_{l_1} - 2\sqrt{r_{l_1} r_{l_2}} + r_{l_2} + r_{l_2} - 2\sqrt{r_{l_2} r_{l_3}} + r_{l_3} + r_{l_3} - \\ -2\sqrt{r_{l_3} r_{l_4}} + r_{l_4} + \dots + r_{l_{n-1}} - 2\sqrt{r_{l_{n-1}} r_{l_n}} + r_{l_n},$$

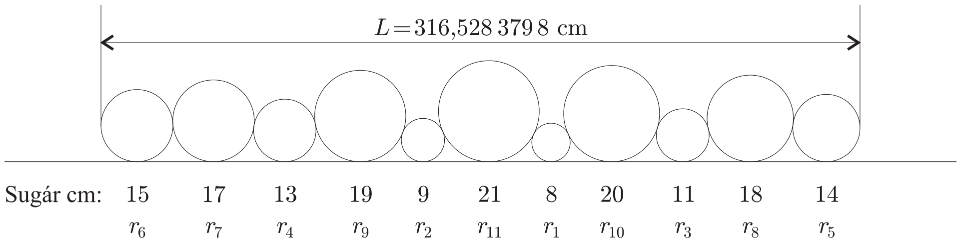
amely viszont a következőképpen írható:

$$D = \left(\sqrt{r_{l_1}} - \sqrt{r_{l_2}}\right)^2 + \left(\sqrt{r_{l_2}} - \sqrt{r_{l_3}}\right)^2 + \left(\sqrt{r_{l_3}} - \sqrt{r_{l_4}}\right)^2 + \dots + \left(\sqrt{r_{l_{n-1}}} - \sqrt{r_{l_n}}\right)^2.$$

A legrövidebb dinnyesor tehát akkor adódik, ha ez utoljára kapott négyzetösszeg maximális. Ezzel megoldottuk a dinnyeárusra a díjbeszedő által kirótt feladatot.

A díjbeszedő feladatát, vagyis a legrövidebb dinnyesor hosszának megállapítását elvileg úgy oldhatjuk meg, hogy a 11 dinnye minden lehetséges sorrendjét előállítjuk, és megkeressük a legrövidebb sor hosszát. Ennek gyakorlati kivitele hosszadalmas, hiszen 11! = 39 916 800 lehetséges sorrendje van a dinnyéknek. A feladatnak ezt a részét is az imént kapott négyzetösszeg útmutatása alapján oldhatjuk meg. Ebben a sugarak négyzetgyökei különbségének négyzetösszege szerepel. Ebből következik, hogy nagy sugarú dinnyék szomszédságában kis sugarúakat kell elhelyezni, amelyre nézve az $|r_{i-1}-r_i|+|r_i-r_{i+1}|$ tájékoztató összeg nagyobb számot ad.

Ennek megfelelően tegyük középre a legnagyobb sugarú dinnyét, és tegyük két oldalára a két legkisebb sugarút. Ezek mellé – kifelé folytatva a sort – tegyük a következő két legnagyobbat, majd melléjük a következő két legkisebbet, aztán megint a két maradék legnagyobbat, majd a két közepes méretűt a sor két végére; végig figyelve az $|r_{i-1}-r_i|+|r_i-r_{i+1}|=\max$ kritérium érvényesülésére. Ezzel az eljárással az alábbi sorozathoz jutunk:



Azaz

$$l_1=6,\quad l_2=7,\quad l_3=4,\quad l_4=9,\quad l_5=2,\quad l_6=11,$$
$$l_7=1,\quad l_8=10,\quad l_9=3,\quad l_{10}=8,\quad l_{11}=5.$$

$$L=r_6+2\left(\sqrt{r_6r_7}+\sqrt{r_7r_4}+\sqrt{r_4r_9}+\sqrt{r_9r_2}+\sqrt{r_2r_{11}}+\sqrt{r_{11}r_1}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{r_1r_{10}}+\sqrt{r_{10}r_3}+\sqrt{r_3r_8}+\sqrt{r_8r_5}\right)+r_5=316{,}528\,379\,8\text{ cm}.$$

Ezzel az elrendezéssel az egész dinnyesorra képezett

$$\Delta=|r_{l_1}-r_{l_2}|+|r_{l_2}-r_{l_3}|+|r_{l_3}-r_{l_4}|+\dots+|r_{l_{n-2}}-r_{l_{n-1}}|+|r_{l_{n-1}}-r_{l_n}|$$

összeg értéke 79; a

$$D=\left(\sqrt{r_{l_1}}-\sqrt{r_{l_2}}\right)^2+\left(\sqrt{r_{l_2}}-\sqrt{r_{l_3}}\right)^2+\left(\sqrt{r_{l_3}}-\sqrt{r_{l_4}}\right)^2+\dots+\left(\sqrt{r_{l_{n-1}}}-\sqrt{r_{l_n}}\right)^2$$

összeg 13,471 620 2 cm. Természetesen $L+D=H$.

Az, hogy a fenti elrendezés a lehetséges legrövidebb sor, az eddigiekből még nem következik. Olvasóinktól várunk egy bizonyítást, vagy egy még rövidebb dinnyesort. . . .