A múlt havi számunkban közreadtuk a 2001. évi őszi Ankét totó-kérdéseit. A telitalálatos szelvény:

$$\mathrm{X}, \mathrm{X}, 2 \qquad 1, \mathrm{X}, 1 \qquad 1, \mathrm{X}, \mathrm{X} \qquad 2, 2, 2, \qquad 2, 2.$$

13 + 1 találatos szelvény egyetlen egy akadt, ezt *Pongrácz András* (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimnázium 10. évf.) adta be. 13 találatot 14-en értek el. Valamennyien könyvjutalomban részesültek.

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.

1. Tükrözzük az F_2 fókuszt az érintő x tengelyre, ekkor az érintő szögfelező tulajdonsága miatt a nagytengely hossza

$$F_1F_2' = \sqrt{(49-9)^2 + (-55-20)^2} = 85.$$

2. Egy homogén, de anizotróp kristályos anyag deformációi (nyújtási és nyírási alakváltozása) egy 3×3-as szimmetrikus mátrixszal, tehát 6 adattal adható meg. Ugyanennyi adat szükséges az anyagban fellépő húzó- és nyírófeszültségek megadásához is. Az általánosított Hooke-törvény szerint a deformációk arányosak a feszültségekkel, és az arányossági tényezők egy 6×6-os (tehát 36 elemet tartalmazó) mártixba rendezhetők. Azonban ez a mátrix is szimmetrikus, így csak $6 \cdot 7/2 = 21$ független eleme van. Ennyi adat szükséges egy kristály rugalmas tulajdonságainak jellemzéséhez, ha a kristály a rácsszerkezet periodicitásán kívül más szimmetriával nem rendelkezik. Ezeket *háromhajlású* (triklin) kristályoknak nevezik.

3. $d_n \mid 1000 + n^2$ és $d_n \mid 2n + 1$, így

$$d_n \mid 2 \cdot (1000 + n^2) - n \cdot (2n+1) = 2000 - n,$$

tehát

$$d_n \mid 2 \cdot (2000 - n) + (2n + 1) = 4001,$$

és így $d_n \le 4001$. Ha $n = 1000$, akkor $d_n = 4001$, tehát az egyenlőség lehetséges.

4. Egy ℓ hosszúságú, R sugarú folyadékszál térfogata $V = \pi R^2 \ell$, a felületi feszültségből származó energiája pedig $2\pi\alpha \cdot R\ell$. ($R \ll \ell$ miatt a felület lényegében a hengerpalást felületével egyenlő, a folyadékszál végeinek területét elhanyagolhatjuk.)

Ha a folyadékszál N darab r sugarú gömbre esik szét, a térfogat változatlanságából

$$N \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = \pi R^2 \ell, \quad \text{azaz} \quad N = \frac{3}{4}\frac{R^2\ell}{r^3}$$

következik. A felületi energia „magától” nem növekedhet, vagyis

$$4\pi\alpha \cdot N r^2 \le 2\pi\alpha \cdot R\ell,$$

ahonnan

$$r \ge \frac{3}{2} R \qquad \text{és} \qquad N \le \frac{2}{9}\frac{\ell}{R} = 100.$$

5. Egy szám négyzetét egyetlen szorzással, negyedik hatványát 2 szorzással, 2^n-edik hatványát n szorzással lehet kiszámítani. Mivel 2001 kettes számrendszerben 11 111 010 010 alakú, 10 szorzással megkaphatjuk a legnagyobb helyiértéknek megfelelő 1024-ik hatványt, és ezt a többi 6 (1-es számjegynek megfelelő) számmal összeszorozva összesen 16 művelet elvégzésével ki tudjuk számítani 2001^{2001}-t.

6. Az esőcsepp állandósult sebességét a sugár köbével arányos gravitációs erő és a sebesség négyzetével és a keresztmetszettel arányos közegellenállási erő egyensúlya határozza meg:

$$R^3 \propto R^2 v^2, \quad \text{azaz} \quad v \propto R^{1/2}.$$

Mivel két esőcsepp összeolvadásakor a (jó közelítéssel összenyomhatatlannak tekinthető) víz térfogat nem változik meg, a sugár $2^{1/3}$-szorosára nő, sebesség pedig $2^{1/6} \cdot v_0 = 2^{7/6}$ m/s lesz.

7. Legyen $T_{r,k}$ azoknak az r-jegyű számoknak a száma, amelyekben pontosan k darab nulla van ($1 \le r \le 6$, $0 \le k < r$). Ekkor

$$S = \sum_{r=1}^{6} \sum_{k=0}^{r-1} T_{r,k} \cdot 2^k.$$

$T_{r,k}$ értéke $\binom{r-1}{k} \cdot 9^{r-k}$, hiszen k darab nullát kell elhelyeznünk az r-jegyű számban (a legelső helyiértékre nem kerülhet), és a további 9 számjegy bármelyike kerülhet a további $(r-k)$ helyre. Így

$$\sum_{k=0}^{r-1} T_{r,k} \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} \cdot 9^{r-k} \cdot 2^k = 9 \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} \cdot 2^k \cdot 9^{(r-1)-k},$$

ami a binomiális tétel szerint $9 \cdot 11^{r-1}$. Készen vagyunk:

$$S = \sum_{r=1}^{6} 9 \cdot 11^{r-1} = 9 \cdot \frac{11^6 - 1}{10} = 1\,594\,404.$$

8. Az energia- és a lendületmegmaradás törvényéből, valamint a rúd merevségéből viszonylag egyszerűen adódik, hogy a rúd felső vége a tömegek nagyságától függetlenül mindig $\sqrt{2g\ell}$ sebességgel csapódik az asztalhoz, ahol ℓ a rúd hossza.

9. Ha összesen kilenc darab 1-esből és 0-ból álló szám osztható 27-tel, akkor 9-cel is osztható, így mind a kilenc jegye 1-es, de ekkor nem osztható 27-tel. A 27 darab 1-esből álló szám osztható 27-tel, tehát ez a válasz lehetséges, ha nincs kisebb. A tíz darab 1-esből álló szám $4 \cdot 1 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 19 \equiv 10 \pmod{27}$, tehát ha a tízesek helyére 1 helyett 0-t írunk, akkor 27-tel osztható számot kapunk (1 111 111 101). A legkisebb egyébként az $(1\,101\,111\,111) = 27 \cdot 40\,781\,893$.

10. Könnyű olyan homogén tetraédert készíteni, amely 2 oldaláról is felborul, ha vízszintes asztallapra állítjuk. Mind a négy oldallapja nem lehet instabil, hiszen a helyzeti energiája a négy helyzet közül valamelyikben biztosan minimális. A kérdés tehát az, hogy van-e olyan tetraéder, amelyik csak egyetlen oldallapján áll meg stabilan. A válasz: *nincs,* ennek részletes bizonyítása megtalálható a Fizikai Szemle „Négyszögletes kerék” rovatában, az 1989. évi 5. szám 189. oldalán.)

11. Indukcióval könnyen igazolható, hogy a 38-nál nagyobb páros számok előállnak a kívánt alakban. A 38-nál kisebb páros számok közül a $18 = 9 + 9$, $24 = 9 + 15$, $30 = 15 + 15$, $34 = 25 + 9$ $36 = 15 + 21$, így tehát 14 páros szám marad, amely nem írható fel a kívánt alakban.

12. A mászókötél vége emelkedik magasabbra. Ennek elemi (felsőbb matematikai ismereteket nem igénylő) bizonyítása a Fizikai Szemle 1994. évi 1. számának 44/B. oldalán olvasható.

13. Mivel az $f(x) = [x] + [2x] + [4x] + [8x]$ függvényre teljesül, hogy $f(x+1) = f(x) + 15$, azért elegendő az $1, 15$ intervallumot végignézni. Némi szöszmötölés után kiderül, hogy itt 8 darab szám áll elő a kívánt alakban, éppen mint

$$f\left(\frac{i}{8}\right) = 1, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 15 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8).$$

Mivel $2001 = 133 \cdot 15 + 6$, azért a válasz $133 \cdot 8 + 3 = 1067$.

13+1. A szabályos háromszög „háromfogású” (a középpontja körül 120 fokos szögű elforgatásnak megfelelő) szimmetriája miatt az egyensúlyi helyzetben mindhárom mágnes ugyanakkora (mondjuk α) szöget kell bezárjon a háromszög szemközti oldalával. A rendszer E összenergiája (amely a három mágnes páronként számítható kölcsönhatási energiája) kifejezhető az α szöggel, és az eredmény:

$$E(\alpha) = A_1 - A_1 \cdot \cos^2 \alpha,$$

ahol A_1 és A_2 pozitív állandók. Ennek a függvénynek $\alpha = 0$-nál és $180°$-nál minimuma van. Ezeknél a szögeknél (amelyeknél a mágnesek párhuzamosak a szemközti oldallal) a rendszernek stabil egyensúlyi állapota van, míg $\alpha = \pm 90°$-nál az energia maximális, ezek tehát instabil egyensúlyi helyzetek.

Megjegyzés. A fenti megoldás csak akkor érvényes, ha a három mágnes egymás terét érzékeli csupán, külső (pl. a földmágnességből származó) mágneses mező nincs, vagy elhanyagolhatóan kicsi. Ez mindig teljesül, ha a három mágnes elegendően közel van egymáshoz. Sajnos az őszi Ankéton kiosztott szelvényeken a külső tér hiányára való utalás nem szerepelt, emiatt többen félreértették a feladatot.