Első nap

1. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög körülírt körének középpontja O. Legyen P az A-ból induló magasságvonal talppontja a BC oldalon.

Tegyük fel, hogy $BCA\sphericalangle \geq ABC\sphericalangle + 30°$.

Bizonyítsuk be, hogy $CAB\sphericalangle + COP\sphericalangle < 90°$.

2. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

minden a, b, c pozitív valós számra.

3. Egy matematikaversenyen 21 lány és 21 fiú vett részt.

•Mindegyik versenyző legfeljebb hat feladatot oldott meg.

•Mindegyik fiúhoz és mindegyik lányhoz van legalább egy olyan feladat, amelyet mindketten megoldottak.

Bizonyítsuk be, hogy van olyan feladat, amelyet legalább három lány és legalább három fiú megoldott.

Második nap

4. Legyen n egy 1-nél nagyobb páratlan egész, k_1, k_2, …, k_n pedig adott egészek. Az 1, 2, …, n számok mind az $n!$ darab $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ permutációjára legyen

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan b és c permutáció, amelyekre $b \neq c$, és $n!$ osztója $(S(b) - S(c))$-nek.

5. Az ABC háromszögben legyen AP a $BAC\sphericalangle$ szögfelezője, ahol P a BC oldalon van, BQ pedig az $ABC\sphericalangle$ szögfelezője, ahol Q a CA oldalon van. Tudjuk, hogy $BAC\sphericalangle = 60°$ és hogy $AB + BP = AQ + QB$.
Mik az ABC háromszög szögeinek lehetséges értékei?

6. Legyenek a, b, c, d egészek, amelyekre $a > b > c > d > 0$. Tegyük fel, hogy

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Bizonyítsuk be, hogy $ab + cd$ nem prímszám.