Emeljük hatodik hatványra (1) két oldalát:

$$2(x^3+y^3)^2 \ge (x^2+y^2)^3 \tag{2}$$

Ha (1) teljesül, (2) is igaz, hiszen (1) jobb oldalán nem negatív szám áll. Megfordítva ez ugyan nem feltétlenül igaz, ezt a kérdést azonban célszerűbb akkor megvizsgálni, ha már tudjuk, milyen számokra teljesül (2).

A műveleteket elvégezve (2)-ből az

$$x^6-3x^4y^2+4x^3y^3-3x^2y^4+y^6 \ge 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel itt $x=y$ mellett a bal oldal értéke 0, az osztható $(x-y)$-nal:

$$(x-y)(x^5+x^4y-2x^3y^2+2x^2y^3-xy^4-y^5) \ge 0.$$

Még mindig kiemelhetünk $(x-y)$-t:

$$(x-y)^2(x^4+2x^3y+2xy^2+y^4) \ge 0.$$

Megkönnyíti a második tényező szorzattá alakítását, ha azt $(x^2+y^2)^2+2xy(x^2+y^2)-2x^2y^2$ alakban írjuk fel. Ha ugyanis z_1, z_2 a

$$z^2+2z-2=0$$

egyenlet gyökei, akkor tetszőleges A, B mellett

$$(A+z_1B)(A+z_2B)=A^2+2AB-2B^2.$$

Emiatt

$$x^4+2x^3y+2xy^3+y^4=\left[x^2+y^2-(\sqrt{3}-1)xy\right]\left[x^2+y^2+(\sqrt{3}+1)\,xy\right].$$

Mivel

$$x^2+y^2-(\sqrt{3}-1)\,xy=(x+y)^2-(\sqrt{3}+1)\,xy=(x-y)^2+(3-\sqrt{3})\,xy,$$

itt az első tényező mindig nem negatív (akármilyen is xy előjele), így elég a második tényezőt szorzattá alakítani. A

$$z^2+(\sqrt{3}+1)\,z+1=0$$

egyenlet gyöktényezős alakja alapján végül is a teljes szorzattá alakítás eredménye:

$$(x-y)^2\left[x^2+y^2-(\sqrt{3}-1)\,xy\right]\left(y+\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\,x\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\,y\right)\ge 0.$$

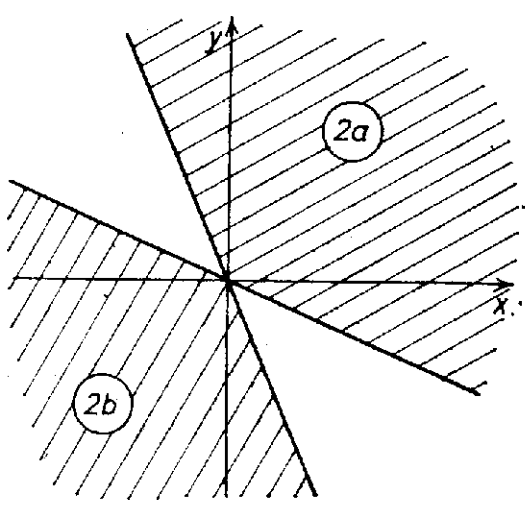
Az utolsó két tényező az x, y koordináta-rendszer egy-egy egyenesén egyenlő 0-val, és a szorzat akkor pozitív, ha az x, y pont vagy mindkét egyenes felett van, vagy mindkét egyenes alatt. Itt a másik két tényező is nem negatív, és ahol azok 0-val egyenlők ($x=y$, illetve $x=y=0$), az utolsó szorzat ott is nem negatív, (2) összes megoldása tehát vagy a

$$2y+\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{2\sqrt{3}}\right)x\ge 0,\quad 2x+\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{2\sqrt{3}}\right)y\ge 0 \tag{2a}$$

feltételeknek, vagy a

$$2y+\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{2\sqrt{3}}\right)x\le 0,\quad 2x+\left(\sqrt{3}+1-\sqrt{2\sqrt{3}}\right)y\le 0 \tag{2b}$$

feltételeknek tesz eleget. A két egyenlőtlenséget mindkét esetben összeadva azt kapjuk, hogy $x+y$ értéke (2a) esetén nem negatív, (2b) esetén nem pozitív.



Mivel

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2),$$

és itt a második tényező csak $x = y = 0$ mellett 0, különben pozitív, $x+y$ előjele megegyezik x^3+y^3 előjelével. A (2a) esetben tehát x^3+y^3 nem negatív, ekkor (2) maga után vonja (1) teljesülését. A (2b) esetben x^3+y^3 nem pozitív, így (1) eleve nem teljesülhet (az $x = y = 0$ esetet kivéve, ami azonban (2a)-ban is benne van). (1) tehát akkor és csakis akkor teljesül, ha az x, y számpárra teljesül (2a).