**1.** Az egyenletek nem értelmesek, ha $x=2$ vagy $x=-2$. Szorozzuk meg az egyenletek mindkét oldalát $(x^2-4)$-gyel, majd rendezzük az egyenleteket!
*a)* $x^2+9x+18=0$, a megoldások: $x_1=-6$, $x_2=-3$;
*b)* $x^2-x-2=0$, a megoldás: $x=-1$ ($x=2$ nem megoldás);
*c)* $x^2+8x+16=0$, a megoldás $x=-4$ ($x_1=x_2=-4$);
*d)* $x^2+4x+8=0$, az egyenletnek nincs megoldása.

**2.** A szögfelezők négyzetet határolnak. Ha a téglalap oldalai $a$ és $4a$ egység, akkor a négyzet oldala $b=\dfrac{4a}{\sqrt{2}}-\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{3a}{\sqrt{2}}$ egység, a téglalap átlója $a\sqrt{17}$ egység. A területek aránya $\dfrac{4a^2}{\frac{9a^2}{2}}=\dfrac{8}{9}$, az átló és a négyzetoldal aránya $\dfrac{\sqrt{17}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$.

**3.** Azonos átalakításokkal

$$f(x)=\frac{(3x^2+12x-36)+(-x+2)}{x^2+4x-12}=3-\frac{x-2}{(x-2)(x+6)}=3-\frac{1}{x+6},$$

ha $-4\le x\le -1$. Ekkor

$$2\le x+6\le 5,\qquad \frac{1}{5}\le\frac{1}{x+6}\le\frac{1}{2},\qquad -\frac{1}{2}\le-\frac{1}{x+6}\le-\frac{1}{5},$$

s végül $f(-4)=\dfrac{5}{2}\le 3-\dfrac{1}{x+6}\le\dfrac{14}{5}=f(-1)$.

Az $f(x)$ legkisebb értéke $5/2$, legnagyobb értéke $\dfrac{14}{5}$ az adott intervallumban. ($f(x)$ minden $\dfrac{5}{2}$ és $\dfrac{14}{5}$ közé eső valós számot felvesz a megadott intervallumon.)

**4.** A $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ azonosságok alkalmazhatjuk vizsgálattal. Ugyanis ha $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$ akkor $\operatorname{tg}2x$ értelmezett, míg $\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ nem, ezzel szűkült az értelmezési tartomány. $x_{1,n}=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$ kielégíti az adott egyenletet, ezért $x_{1,n}$ megoldás. Legyen $x\ne\dfrac{\pi}{2}+n\pi$.

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{\operatorname{tg}x},$$

$x=k\pi$ helyen $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ nem értelmezett, így írhatunk helyette $-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}$-et.

$$-\frac{3}{\operatorname{tg}x}=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x},$$

ahonnan $\operatorname{tg}^2x=3$, $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$ vagy $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$. Az $x_{1,n}$-en kívül az egyenlet megoldásai: $x_{2,\,k}=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ és $x_{3,\,m}=-\dfrac{\pi}{3}+m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$.

**5.** Ismeretes, hogy

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\qquad\text{és}\qquad 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Mivel $(k+3)(7k-1)=7k^2+20k-3$, azért

$$S_n=(7\cdot1^2+20\cdot1-3)+(7\cdot2^2+20\cdot2-3)+\cdots+(7n^2+20n-3), S_n=7\cdot(1^2+2^2+\cdots+n^2)+20\cdot(1+2+\cdots+n)-3n, S$$

(Az állítást teljes indukcióval is igazolhatjuk.)

**6.** *a)* Mivel $D=p^2-4q\ge 0$, $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, ezért valóban $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=p^2-4q=D$.
*b)* $D=4a^2-4(2a^2-3a)=-4\cdot a(a-3)$. $D\ge 0$, ha $0\le a\le 3$.

$$(x_1-x_1)^2=D=-4a^2+12a=9-4\left(a-\frac{3}{2}\right)^2\le 9.$$

$(x_1-x_2)^2$ legnagyobb értéke 9, amelyet $a=\dfrac{3}{2}$ esetén vesz fel.

**7.** A keresett $P_0$ ponton áthaladó egyenesnek van meredeksége, hiszen nem lehet párhuzamos az $y$ tengellyel. Válasszuk paraméternek az egyenes $m$ meredekségét, azaz az egyenes egyenletét $y = m(x+6)$ alakban keressük. Ez az egyenes az $y$ tengelyt a $D(0; 6m)$ pontban metszi, az $AC$ egyenest az $E(x_0, y_0)$ pontban. Az $ABC$ háromszög területe 24 területegység, az $ADE$ háromszög területe 12 területegyeség, tehát $AD \cdot x_0 = 24$. $AD = 16 - 6m$. Az $AC$ egyenes egyenlete $16x + 3y = 48$. Az $y = mx + 6m$ egyenletű egyenes az $AC$ egyenest olyan $x_0$ abszcisszájú pontban metszi, amelyre

$$16x_0 + 3(mx_0 + 6m) = 48, \qquad x_0 = 6 \cdot \frac{8-3m}{16+3m},$$

így

$$2 \cdot (8-3m) \cdot 6 \cdot \frac{8-3m}{16+3m} = 24, \qquad \text{ahonnan} \qquad 9m^2 - 54m + 32 = 0,$$

$m_1 = \dfrac{2}{3}$, $m_2 = \dfrac{16}{3}$. A keresett egyenes egyenlete: $y = \dfrac{2}{3}x + 4$. ($m = \dfrac{16}{3}$ esetén az egyenes nem metszi az $AC$ szakaszt. Ennek a „megoldásnak” előjeles területtel geometriai jelentést tulajdoníthatunk. Hogyan?)

**8.** *a)* Mivel

$$x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) = \frac{1}{2}\left((x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right) \geq 0,$$

azért $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx = 1$. Egyenlőség $x = y = z$ esetén áll fenn. (Az igazolás során alkalmazhatjuk az $a^2 + b^2 \geq 2ab$ azonos egyenlőtlenséget.)

*b)* Ha a téglatest éleinek hossza $x$, $y$, $z$ egység, akkor $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

A téglatest felszíne $A(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$ területegység.

$$A(x, y, z) = 2(xy + yz + zx) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) = 8.$$

A legnagyobb felszínérték $A_{\max} = 8$ területegység, amit akkor kapunk, ha $x = y = z$, tehát ha a téglatest kocka. (A kocka $x$ élére $3x^2 = 4$, $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ egység.)

**Rábai Imre**