Célszerűnek látszik az $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ szorzatot összeggé alakítani, mivel így remélhetjük, hogy bizonyos tagok összege 0 lesz és a_n egyszerűbben is kifejezhető. Próbáljuk meg az $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$-t $\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+l}+\dfrac{C}{n+2}$ alakban felírni:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}=\frac{n^2(A+B+C)+n(3A+2B+C)+2A}{n(n+1)(n+2)}.$$

Ha ez minden n-re teljesül, akkor nyilván

$$\begin{aligned}A+B+C&=0,\\3A+2B+C&=0,\\2A&=1.\end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $A=\dfrac{1}{2}$; $B=-1$; $C\dfrac{1}{2}$, tehát

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

(1)-ben minden tagot hasonlóképpen felbontva, $\dfrac{1}{k}$ $(k=3,\ldots,n)$ háromszor szerepel: kétszer $\dfrac{1}{2}$ és egyszer -1 együtthatóval, ezek összege nyilván 0. Az $\dfrac{1}{1}$ és $\dfrac{1}{n+2}$ csak egyszer, az első, illetve az utolsó tag összeggé bontásában fordul elő, míg az $\dfrac{1}{2}$ és $\dfrac{1}{n+1}$ az első kettő, illetve az utolsó két tag felbontásában. Így

(2) $$a_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)(n+2)}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n(n+1)(n+2)}=0$ miatt a sorozat konvergens és határértéke $\dfrac{1}{4}$.

Pethő Attila (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., III. o. t)

Megjegyzés. Az

(3) $$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

felbontás hasonló eredményre vezet, sőt még némi általánosításra is lehetőséget ad.

Az $A_n=\dfrac{1}{1\cdot 2\ldots k}+\dfrac{1}{2\cdot 3\ldots(k+1)}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}$ sorozat határértékét keresve ugyanis (3) mintájára alkalmazhatjuk a könnyen igazolható

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}=\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-2)}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}\right).$$

azonosságot. Ennek segítségével kapjuk, hogy

$$A_n=\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{(n+1)\ldots(n+k-1)}\right).$$

Végül $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\dfrac{1}{(k-1)(k-1)!}$,
tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+k-1)!}=\frac{1}{(k-1)(k-1)!}.$$

Lenkei Péter (Budapest, József A. Gimn., IV. o. t.)