Ha két tízes számrendszerben felírt számot a szokásos módon összeadunk (az összeget is tízes számrendszerben írjuk fel), az összeg képzésénél előfordulhat, hogy 10 db egyforma kisebb egységet be kell váltanunk egy darab tízszer nagyobb egységre (itt egységnek a tíz nem negatív egész kitevős hatványait tekintjük), de sohasem kell felváltanunk egy nagyobb egységet kisebb egységekre, mint pl. a kivonásnál. Ezért az összeg számjegyeinek az összege sohasem haladhatja meg a tagok számjegy-összegeinek az összegét, vagyis

$$s(A+B) \leq s(A)+s(B), \tag{1}$$

ahol A és B tetszőleges pozitív egész számok.

Az (1) összefüggés többszöri felhasználásával tetszőleges számú tagra hasonló összefüggést kapunk:

$$s(A_1+A_2+\ldots+A_m) \leq s(A_1)+s(A_2)+\ldots+s(A_m). \tag{2}$$

Ha speciálisan $A_1=A_2=\ldots=A_n=A$, akkor (2) így alakul:

$$s(nA) \leq n \cdot s(A). \tag{3}$$

Megállapíthatjuk azt is, hogy

$$s(10^k \cdot A)=s(A), \quad (k=0,\,1,\,2,\,\ldots), \tag{4}$$

hiszen $10^k \cdot A$ tízes számrendszerbeli alakja nem más, mint az A tízes számrend szerbeli alakja és utána k darab 0 számjegy.

Legyen $B=b_m \cdot 10^m+b_{m-1}10^{m-1}+\ldots+b_1 \cdot 10+b_0$.

Ekkor

$$s(AB)=s(Ab_m \cdot 10^m+Ab_{m-1} \cdot 10^{m-1}+\ldots+Ab_1 \cdot 10+Ab_0).$$

(2) alapján

$$s(AB) \leq s(Ab_m \cdot 10^m)+s(Ab_{m-1} \cdot 10^{m-1})+\ldots+s(Ab_1 \cdot 10)+s(Ab_0).$$

(4), majd (3) alapján pedig

$$\begin{gathered} s(AB) \leq s(Ab_m)+s(Ab_{m-1})+\ldots+s(Ab_1)+s(Ab_0) \leq \\ \leq b_m s(A)+b_{m-1}s(A)+\ldots+b_1 s(A)+b_0 s(A), \end{gathered}$$

de mivel $b_m+b_{m-1}+\ldots+b_1+b_0=s(B)$, ezért

$$s(AB) \leq s(A)s(B). \tag{5}$$

A feladat állításának igazolása érdekében (4) alkalmazásával alakítsuk át $s(n)$-et a következőképpen:

$$s(n)=s(1000n)=s(125 \cdot 8n)$$

Legyen (5)-ben $A=125$ és $B=8n$.

Ekkor $s(125 \cdot 8n) \leq s(125) \cdot s(8n)$.

Mivel $s(125)=8$, a kívánt összefüggés ezzel igazolást nyert.

Csikós Balázs (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)