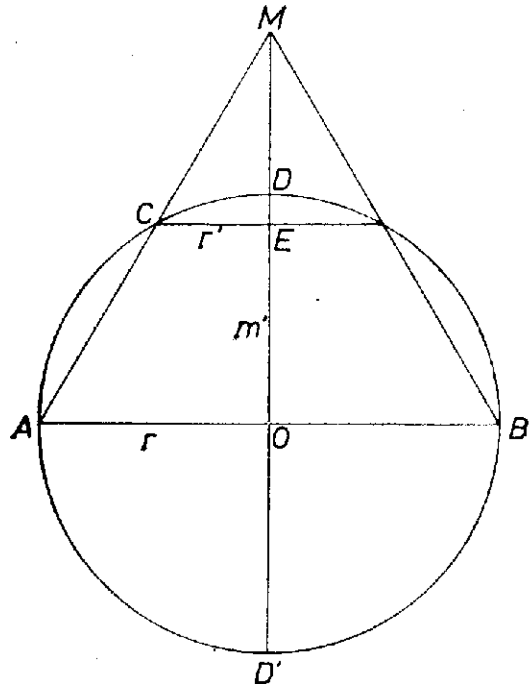
Legyen a kúp egy tengelymetszete az MAB egyenlő szárú háromszög, messe az $AB=2r$ alap O felezőpontja körüli r sugarú kör az MA alkotót a C, az $MO=m$ tengelyt a D és D' pontokban, továbbá legyen C vetülete OM-re E.



A kúp és a félgömb közös részét a C-n átmenő, az alappal párhuzamos sík egy csonkakúpra és egy gömbszeletre vágja szét. Legyen a csonkakúp magassága $OE=m'$, kisebbik alapkörének sugara r', ekkor a gömbszelet magassága $r-m'$.

Ezekkel a két rész V_{csk}, ill. V_{gsz} térfogatára ismert képletek:

$$V_{\text{csk}}=\frac{\pi}{3}m'(r^2+rr'+r'^2),$$
$$V_{\text{gsz}}=\frac{\pi}{3}(r-m')^2(2r+m').$$

Az m', r' méreteket a kör M-ből húzott szelői, valamint hasonló háromszögek révén kifejezzük az m, r adatokkal:

$$MC\cdot MA=MD\cdot MD',$$
$$ME=\frac{MC}{MA}\cdot MO=\frac{MO\cdot MD\cdot MD'}{MA^2}=\frac{m(m-r)(m+r)}{m^2+r^2}=\frac{m(m^2-r^2)}{m^2+r^2},$$
$$m'=m-ME=\frac{2mr^2}{m^2+r^2},$$
$$CE=\frac{ME}{MO}\cdot AO=\frac{r(m^2-r^2)}{m^2+r^2}=r',\quad r'^2+m'^2=r^2.$$

Ezeket beírva, a két darab együttes térfogata

$$V=\frac{\pi}{3}\left[2r^3+rm'r'-2r^2m'+m'(r'^2+m'^2)\right]=$$
$$=\frac{2\pi r^3}{3}\left[1+\frac{mr(m^2-r^2)}{(m^2+r^2)^2}-\frac{mr}{m^2+r^2}\right]=\frac{2\pi r^3}{3}\left[1-\frac{2mr^3}{(m^2+r^2)^2}\right].$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. Azt is látjuk az eredményből, hogy az ábra AC szeletének MO körüli forgatásával előálló gyűrű-test térfogata mint a félgömb és a vizsgált darab térfogatának különbsége

$$\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{mr^6}{(m^2+r^2)^2}.$$