

1. Jelölje a derékszögű háromszög két befogóját  $a$  és  $b$ , a kerületét  $2s$ . Ekkor  $ab = 86,4$ ,  $s = \frac{T}{\rho} = 18$ ,  $2s = 36$ .

Az érintő szakaszok egyenlősége miatt az átfogó  $a + b = 4,8$ , tehát  $2a + 2b = 9,6$ ,  $a + b = 4,8$ . Az egyenletrendszer megoldása  $a = 14,4$ ,  $b = 6$  egység ( $a \geq b$ ), az átfogó  $c = 20,4 - 4,8 = 15,6$  egység.

2. Az egyenlet diszkriminánsa

$$D = 4(b+c)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (ab+bc+ca-a^2) = 4((a-b)^2 + (a-c)^2) \geq 0$$

minden  $a, b, c \in \mathbf{R}$  esetén, tehát mindig van valós megoldás. A két megoldás pontosan akkor egyenlő, ha  $D = 0$ , azaz ha  $a = b = c$ . Ekkor  $x_1 = x_2 = a$ .

3. Jelölje az átlót  $e$ , a szárat  $c$ , a trapéz köré írt kör sugarát  $r$ . Ekkor  $e \cos \alpha = \frac{a+b}{2}$ ,  $c = 2r \sin \alpha$ . Mivel  $c^2 = e^2 + a^2 - 2ea \cos \alpha$ , azért  $c^2 = e^2 - ab$ , tehát

$$c^2 = \left( \frac{a+b}{2 \cos \alpha} \right)^2 - ab = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 4ab \cos^2 \alpha}{4 \cos^2 \alpha} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos 2\alpha}{4 \cos^2 \alpha}.$$

A trapéz köré írt kör sugara

$$r = \frac{c}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos 2\alpha}}{2 \sin 2\alpha}.$$

4. A feltétel szerint  $a_1 = q + 3$  és  $S_n = 35$ . Ha  $q = 1$ , akkor  $a_1 = 4$ , tehát  $a_n = 4$ , így  $a_1 \cdot a_n = 16 \neq 100$ , tehát  $q \neq 1$ . Ekkor  $35 = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$  és  $a_1^2 \cdot q^{n-1} = 100$ , tehát  $q - 1 = a_1 - 4$  és  $a_1 \cdot q^n = \frac{100}{a_1}(a_1 - 3)$ ; ezekből  $35(a_1 - 4) = \frac{100}{a_1}(a_1 - 3) - a_1$ ,

$$36a_1^2 - 240a_1 + 300 = 0, \quad a_1 = 5 \quad \text{vagy} \quad a_1 = \frac{5}{3}.$$

Ha  $a_1 = 5$ , akkor  $q = 2$  és  $n = 3$ , hiszen  $25 \cdot 2^{n-1} = 25 \cdot 4$ , ha  $a_1 = \frac{5}{3}$ , akkor  $q = -\frac{4}{3}$ , és nincs megfelelő  $n$ , hiszen  $\frac{25}{9} \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1} = 100$  egyetlen  $n$ -re sem teljesül.

5. A  $P$  ponton áthaladó  $x = 5$  egyenletű egyenes a feltételnek nem felel meg. Minden ettől különböző, a  $P$  ponton áthaladó egyenes egyenlete  $y - 3 = m(x - 5)$  alakban is írható. Ha  $m = -\frac{3}{2}$ , akkor az egyenes párhuzamos az adott egyenesekkel, így  $m \neq -\frac{3}{2}$ . A keresett egyenes az első egyenest az  $x_1 = \frac{10 + 10m}{3 + 2m}$ , a második egyenest az  $x_2 = \frac{5 + 10m}{3 + 2m}$  abszcisszájú pontban metszi. A feltétel szerint  $|x_1 - x_2| = 1$ , tehát  $\frac{5}{|3 + 2m|} = 1$ , ahonnan  $m = 1$  vagy  $m = -4$ . A feltételnek két egyenes felel meg, ezek egyenlete:  $x - y = 2$ , illetve  $4x + y = 23$ .

(A feladat más úton is megoldható. Hogyan?)

6. Teljes négyzetté alakítással

$$(1) \quad (x - 2 \sin xy)^2 + 4 \cos^2 xy = 0,$$

hiszen  $4 - 4 \sin^2 xy = 4 \cos^2 xy$ .

Az (1) egyenlet pontosan akkor teljesül, ha  $\cos xy = 0$  és  $x = 2 \sin xy$ .

Ha  $xy = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , akkor  $\sin xy = 1$ , tehát  $x = 2$  és  $y = \frac{\pi}{4} + n\pi$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;

ha  $xy = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , akkor  $\sin xy = -1$ , tehát  $x = -2$  és  $y = -\frac{3\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

(A feladat más módokon is megoldható. Hogyan?)

7. Legyen a keresett távolság  $x$ , a gúla magasságát jelölje  $m$ . A hasonló testek térfogatának arányára vonatkozó tétel alkalmazásával  $x = \frac{m}{\sqrt[3]{2}}$ . A gúla akkor létezik, ha  $c > \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ , azaz ha  $4c^2 > a^2 + b^2$ . Az átló tengelymetszet felhasználásával  $m^2 = c^2 - \frac{a^2 + b^2}{4}$ ,  $m = \frac{1}{2}\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}$ . A szöban forgó távolság  $x = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}$ , a síkmetszet területe  $t = \frac{ab}{\sqrt[3]{4}}$ .

8. Az eredeti feladatban az egyenlet gyökeire helyesen:  $x_1^2 + x_2^2 = \frac{9}{2}$ .

Mivel a gyökök valósak, azért  $p^2 + 4q \geq 0$ ,  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1x_2 = -q$ , így

$$\frac{9}{2} = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 + 2q, \quad \text{azaz} \quad 4q = 9 - 2p^2, \quad q = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}p^2.$$

Az  $f(p) = q - p = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}p^2 - p = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}(p+1)^2$  kifejezés értékkészletét a  $-3 \leq p \leq 3$  intervallumban keressük, mivel  $p^2 + 4q = p^2 + 9 - 2p^2 \leq 0$  pontosan akkor, ha  $p^2 \leq 9$ . Így  $-2 \leq p+1 \leq 4$ , amiből  $0 \leq (p+1)^2 \leq 16$ , ezért  $-8 \leq -\frac{1}{2}(p+1)^2 \leq 0$ , tehát  $-\frac{21}{4} \leq f(p) \leq \frac{11}{4}$ .

**Rábai Imre**