I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ síkbeli konvex hatszögben az A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1 oldalak felezőpontjai rendre a B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 pontok.

Bizonyítsa be, hogy a

$$\overrightarrow{B_1B_4}, \qquad \overrightarrow{B_3B_6}, \qquad \overrightarrow{B_5B_2}$$

vektorok összege nullvektor! (9 pont)

2. Az $A = \overline{xyzu}$ és a $B = \overline{uzyx}$ tízes számrendszerben felírt, pontosan négyjegyű számok. Szorzatuknak pontosan az utolsó három számjegye 0. Határozza meg az összes ilyen tulajdonságú A és B számpárt! (14 pont)

3. Az

$$x^4 - px^3 + q = 0$$

egyenletről tudjuk, hogy

a) a p és a q paraméterek pozitív prímszámok,

b) az egyenletnek van olyan gyöke, amelyik egész szám.

Határozza meg a p és a q paramétereket, valamint a lehetsés p, q értékekhez tartozó egyenlet összes egész gyökét! (14 pont)

4. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD. Az AC átló hossza 3 cm, a BD átló hossza 4 cm, továbbá

$$CAB\sphericalangle = 2 \cdot DBA\sphericalangle.$$

Számítsa ki a trapéz területét! (14 pont)

5. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$18\sqrt{2x-3} - 9\sqrt[4]{(2x-3)(x-2)} \geq 2\sqrt{x-2}$$

egyenlőtlenséget! (18 pont)

6. Egy $x \mapsto f(x)$ valós számokra értelmezett függvényről azt tudjuk, hogy minden valós x-re értelmezve van, és

$$2 \cdot f(x) + f(1-x) = x^2.$$

a) Mennyi a függvény értéke az $x = 5$ helyen?

b) Adja meg a hozzárendelést meghatározó $f(x)$ képletét! (19 pont)

Második forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6, (1) \sqrt{x+y} - y + x = 2 (2)$$

egyenletrendszert! (15 pont)

2. Egy egyenlőszárú háromszögről tudjuk, hogy a köré írt kör területe kilencszerese a beírt kör területének. Számítsa ki a háromszög szögeit! (17 pont)

3. Hogyan kell a

3 000 003

tízes számrendszerben felírt hétjegyű számban (a legnagyobb helyiértéktől kiindulva) a harmadik és az ötödik helyen álló nullák közül legalább egyet úgy megváltoztatni, hogy a változtatás után kapott hétjegyű szám osztható legyen 13-mal? (17 pont)

4. Bizonyítsa be, hogy az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} + \frac{1}{2001}$$

összeg nem egész szám! (18 pont)

5. $ABCD$ egységnyi oldalú négyzet. Az AB oldalon az E pont egy belső pont, az AD oldalon az F pont ugyancsak belső pont.

Bizonyítsa be, hogy ha az AEF háromszög kerülete 2 kerületegység, akkor a $BEFC$ négyszög nem lehet húrnégyszög. (21 pont)

Harmadik (döntő) forduló

1. Milyen x, y, z valós számok elégítik ki a következő egyenletrendszert?

$$x^3+y^3+z^3=8, x^2+y^2+z^2=22, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{z}{xy}=0.$$

2. Az $ABCD$ négyzet belsejében elhelyezkedő P pontnak az A, B, C csúcsoktól mért távolságai rendre 1, 2, 3 hosszúságegységek.

Számítsa ki az APB szög nagyságának pontos értékét!

3. Az $ABCD$ téglalap oldalai

$$AB=CD=5a \qquad \text{és} \qquad BC=DA=3a$$

hosszúságúak ($a>0$). Az oldalakra ugyanazon körüljárási irányban felmérjük az

$$x=AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$$

szakaszokat úgy, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ négyszöget az $ABCD$ téglalap tartalmazza.

a) Hogyan kell az x szakaszt megválasztani, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög területe a lehető legkisebb legyen?

b) Legyen az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög területe k^2 ($k^2 \neq 0$). A k^2-től függően hány megoldása van a feladatnak?

II. kategória: Általános tantervű gimnáziumokElső (iskolai) forduló

1. Közelítő értékek használata nélkül adjuk meg a

$$K=\operatorname{tg}47^\circ+\operatorname{tg}43^\circ-\operatorname{tg}2^\circ(\operatorname{tg}47^\circ-\operatorname{tg}43^\circ)$$

kifejezés pontos értékét! (7 pont)

2. Az $ABCD$ trapéz AB és CD oldalai párhuzamosak, kerületének hossza 2. A B és C csúcsokhoz tartozó külső szögfelezők a P pontban, az A és D csúcsokhoz tartozó külső szögfelezők pedig a Q pontban metszik egymást. Mekkora a PQ szakasz hossza? (7 pont)

3. Az A halmaz a $\dfrac{3n-4}{5n-3}$, a B halmaz a $\dfrac{4k-3}{7k-6}$ alakban előállított számokból áll, ahol n és k befutják a nemnegatív egész számok halmazát. Írjuk fel az A és B közös részének ($A\cap B$-nek) az elemeit. (7 pont)

4. Azok közül a téglatestek közül, amelyek térfogatának a mérőszáma kétszerese a felszínük mérőszámának, melyiknek a legkisebb a térfogata? (7 pont)

5. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC=BC$. Jelölje a háromszög tetszőleges P belső pontjának az oldalegyenesektől mért távolságait x, y, z. Tudjuk, hogy $x^2+y^2+z^2$ a C csúcshoz tartozó CT magasság F felezőpontjára a legkisebb. Mekkorák a háromszög szögei? (7 pont)

Második forduló

1. Az M pozitív egészből az N pozitív egész úgy származtatható, hogy M jegyeit valamilyen más sorrendben írjuk fel (első jegyük nem lehet 0). Lehet-e mindkét szám 2-nek pozitív egész kitevőjű hatványa?

2. Egy háromszög két kisebbik oldalát, a-t és b-t érintő hozzáírt körök sugarai r_a és r_b. A háromszög területe $t=r_a\cdot r_b$. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(5^x-2^{x-2}\right)^2+2\cdot\lg\left(5^x+2^{x-2}\right)=x.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan n pozitív egész, amelyre a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x)=\cos x+\cos\left(x\sqrt{n^2+1}\right)$$

függvény periódikus.

Harmadik (döntő) forduló

1. Legyen a $H = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2000,\ 2001\}$ halmaz 77 elemű részhalmazai közül azoknak a száma, amelyekben az elemek összege páros, S-sel egyenlő, és azoknak a száma, amelyekben az elemek összege páratlan, N-nel egyenlő. Melyik nagyobb: S vagy N? És mennyivel?

2. Egy hatoldalú szabályos gúla alaplapja és oldallapjai által bezárt szög egyenlő bármely két másodszomszédos oldallap síkjának a hajlásszögével. Mekkora szöget zárnak be a gúla oldalélei az alaplappal?

3. Bizonyítsuk be, hogy az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ pozitív számokra teljesül az

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

egyenlőtlenség.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok Első forduló

1. Legyenek x, y és z pozitív, 4-nél kisebb valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}\quad \text{és}\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$$

számok között van olyan, amely nagyobb vagy egyenlő 1-nél.

2. Oldjuk meg az egész számok körében az $5x^2-14y^2=11z^2$ egyenletet.

3. Melyek azok a háromszögek, amelyekben az egyik csúcsból induló szögfelező egyenesére szimmetrikusan helyezkedik el az ugyanonnan induló súlyvonal és magasságvonal?

4. Igazoljuk, hogy bármely $1\leq m\leq n$ esetén

$$n\left(\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^{m-1}\binom{n}{m-1}\right)$$

osztható m-mel.

5. Határozzuk meg a legkisebb olyan c valós számot, amely rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: Bármely háromszög kerületén található két olyan pont, amelyek a háromszög kerületét felezik, és a távolságuk nem nagyobb a kerület c-szeresénél.

Második (döntő) forduló

1. Legyen c pozitív egész, és jelölje c_1, c_3, c_7, illetve c_9 rendre a c azon pozitív osztóinak számát, amelyek utolsó számjegye (tízes számrendszerben) 1, 3, 7, illetve 9. Bizonyítsuk be, hogy $c_1+c_9\geq c_3+c_7$.

2. Adottak a síkon a k_1 és k_2 körök, valamint a P pont. Szerkesztendő olyan, a P-n átmenő e egyenes, amely a k_i köröket ($i=1,\ 2$) az A_i és B_i pontokban metszi úgy, hogy a k_i körvonalak alkalmas C_i pontjaira $A_1C_1=A_2C_2=B_1C_1=B_2C_2$ teljesül. (Nem szükséges annak diszkutálása, hány ilyen e egyenes létezik, illetve létezik-e egyáltalán ilyen e egyenes.)

3. Adott $k+m$ darab különböző, 1-nél nagyobb egész szám, $a_1,\ \ldots,\ a_k,\ b_1,\ \ldots,\ b_m$, ahol mindegyik a_i páros sok, mindegyik b_j pedig páratlan sok (nem feltétlenül különböző) prímszám szorzata. Hányféleképpen lehet a $k+m$ darab szám közül néhányat (akár egyet sem, akár az összeset) kiválasztani úgy, hogy bármelyik b_j-nek ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$) a kiválasztott számok között páros sok osztója legyen?