Októberi számunkban közöltük az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldását. Ebben a cikkben az egyik feladatra visszatérve olyan további megoldást mutatunk, amelyik lényegesen különbözik az októberben közölttől, ugyanakkor tanulságos lehet mindazoknak, akik a jövőben országos vagy nemzetközi versenyeken szeretnének eredményesen részt venni. Ebben a megjegyzésben a 2. feladattal foglalkozunk.[1]

A 2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1 \tag{1}$$

minden a, b, c pozitív valós számra.

A feladat első pillantásra ártalmatlan egyenlőtlenségnek tűnik, ami nem lehet nagyon nehéz... vagy mégis? A magyar csapat számára ez a feladat bizonyult a legnehezebbnek. Hat versenyzőnk együttvéve csupán 2 pontot szerzett meg a lehetséges 42-ből.

A megoldáshoz első lépésként kézenfekvő lehet behelyettesíteni a $x=\frac{bc}{a}$, $y=\frac{ca}{b}$, $z=\frac{ab}{c}$ változókat. Ezek szintén pozitív számok, a szorzatuk 1, és a behelyettesítés után az (1) egyenlőtlenség a következő, egyszerűbb alakot ölti:

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}}\ge 1. \tag{2}$$

Azt is megállapíthatjuk, hogy az $x=y=z=1$ (azaz $a=b=c$) esetben egyenlőség áll fenn.

Hogyan tovább? Láthatjuk, hogy a feladat nehézsége abból fakad, hogy összegek négyzetgyökeit kell felülről becsülnünk, ehhez pedig meglehetősen kevés eszköz áll rendelkezésünkre. Ha alsó becslésre volna szükség, akkor egészen más lenne a helyzet. A három négyzetgyökös kifejezést kényelmesen tudjuk alulról becsülni például a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséggel. Közben persze vigyáznunk kell, hogy $x=y=z=1$ esetén mindig egyenlőség álljon:

$$\sqrt{1+8x}\ge\sqrt{9\cdot\sqrt[9]{1\cdot x^8}}=3x^{4/9};\quad \sqrt{1+8y}\ge 3y^{4/9};\quad \sqrt{1+8z}\ge 3z^{4/9}. \tag{3}$$

Ezek alapján a három gyökös kifejezés szorzatát és összegét sem nehéz alulról megbecsülni.

De mi a helyzet a felső becsléssel? A felső becsléshez jó lenne megszabadulni a kellemetlen négyzetgyökjeltől. Ez pedig legegyszerűbben négyzetre emeléssel lehetséges. Szorozzuk be a (2) egyenlőtlenséget a nevezőkkel. Az így kapott egyenlőtlenségben csupán egyetlen négyzetgyökös kifejezést kell felülről becsülnünk, a jobb oldalt:

$$\sqrt{1+8y}\sqrt{1+8z}+\sqrt{1+8z}\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8x}\sqrt{1+8y}\ge\sqrt{1+8x}\sqrt{1+8y}\sqrt{1+8z}. \tag{4}$$

Most pedig vegyünk nagy levegőt, emeljük mindkét oldalt négyzetre, és rendezzük az egyenlőtlenséget! (Ne felejtsünk el xyz helyére 1-et írni.) A rendezés után a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$4x+4y+4z+\sqrt{1+8x}\sqrt{1+8y}\sqrt{1+8z}\left(\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y}+\sqrt{1+8z}\right)\ge 255. \tag{5}$$

A rendezés során azt tapasztaljuk, hogy (4) jobb oldalának négyzetét „lenyelik” a baloldalon álló tagok négyzetei, csupán egy konstans marad.

A megoldás innen kezdve triviális: behelyettesítjük a (3) egyenlőtlenség-hármast és alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

Kós Géza

[1] Az olimpiai feladatok megoldása a KöMaL 2001/7. számának 389–394. oldalán olvasható.