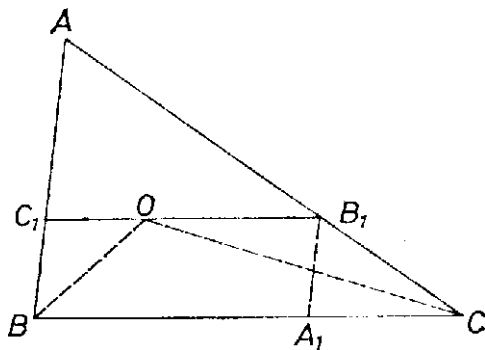


Az OC_1B háromszög egyenlő szárú, ugyanis $C_1OB \sphericalangle = OBC \sphericalangle$, mert váltószögek, és $C_1OB \sphericalangle = OBC \sphericalangle$, mert OB a $CBA \sphericalangle$ szögfelezője. Így $OC_1 = C_1B$.



Ugyanígy $CB_1 = OB_1$ tehát a BCB_1C_1 trapéznek mind a négy oldalát ismerjük. Nyilvánvalóan szükséges feltétele a háromszög létezésének, hogy teljesüljön

$$(1) \quad BC > OC_1 + OB_1.$$

A trapéz szerkesztése visszavezethető az A_1B_1C háromszög szerkesztésére, ahol $A_1B_1 \parallel AB$ és A_1 rajta van BC -n, a szerkesztés menete:

Megszerkesztjük az említett háromszöget az $A_1B_1 = OC_1$, $B_1C = OB_1$ és $A_1C = BC - (OB_1 + OC_1)$ szakaszokból. Eltoljuk A_1B_1 -t $\overrightarrow{CA_1}$ irányú, $OB_1 + OC_1$ nagyságú vektorral, így a BCB_1C_1 trapézt kapjuk, végül a B_1C és BC_1 egyenesek metszéspontja A .

A szerkesztés pontosan akkor végezhető el, ha az A_1B_1C háromszög szerkeszthető. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy e háromszög oldalaira fennálljon a háromszög-egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} BC - (B_1O + OC_1) &< OB_1 + OC_1, \\ OB_1 &< BC - (OB_1 + OC_1) + OC_1 \text{ és} \\ OC_1 &< BC - (OB_1 + OC_1) + OB_1, \end{aligned}$$

azaz

$$(2) \quad BC < 2(OB_1 + OC_1),$$

$$(3) \quad 2 \cdot OC_1 < BC,$$

$$(4) \quad 2 \cdot OB_1 < BC.$$

Észrevehetjük, hogy az (1) feltétel (3) és (4) következménye, így a (2), (3) és (4) teljesülése a szerkeszthetőség feltétele. Ekkor a szerkesztés menetéből látszik, hogy az ABC háromszög egybevágóság erejéig meghatározott.

Meg kell még mutatnunk, hogy a szerkesztés helyes, a kapott ABC háromszög beírt körének középpontja a rajta átmenő C_1B_1 szakaszt valóban az adott hosszúságú OC_1 , OB_1 szakaszokra osztja. Ehhez elegendő belátni, hogy O rajta van a B és C csúcsokból induló szögfelezőn. A szerkesztés miatt az OC_1B háromszög egyenlő szárú, így $C_1OB \sphericalangle = OBC_1 \sphericalangle$. Mivel $CB \parallel C_1B_1$ a szerkesztés miatt, így $C_1OB \sphericalangle = OBC \sphericalangle$, azaz $OBC \sphericalangle = OBC_1 \sphericalangle$, tehát O rajta van a B szög szögfelezőjén. Ugyanígy látható be, hogy O rajta van a C szög szögfelezőjén.