1. Mivel $x^2+2x-3\neq 0$, azért $x\neq -3$, $x\neq 1$. A másodfokú tényezőket szorzattá bontjuk:

$$\frac{2x+2}{7}=\frac{(x-3)(x+2)(x+1)}{(x+3)(x-1)}.$$

Szorozzuk mindkét oldalt $7(x+3)(x-1)$-gyel: $2(x+3)(x-1)(x+1)=7(x-3)(x+2)(x+1)$. Most 0-ra rendezünk, és kiemelünk $(x+1)$-et: $0=(x+1)(5x^2-11x-36)$. A másodfokú tényezőt szorzattá bontjuk: $0=(x+1)(x-4)(5x+9)$, így a megoldások: $x_1=-1$, $x_2=4$, $x_3=-\dfrac{9}{5}$.

2. A feladatban szereplő törtek nevezői és az osztandó nem nulla: $a\neq -1;\ 0;\ 1$. Hozzunk egyszerűbb alakra:

$$\left(\frac{a+1}{1-a}+\frac{a-1}{a+1}-\frac{4a^2}{a^2-1}\right):\left(\frac{2}{a^3+a^2}-\frac{2-2a+2a^2}{a^2}\right)=$$

$$=\frac{-a^2-2a-1+a^2-2a+1-4a^2}{(a-1)(a+1)}:\frac{2-(2-2a+2a^2)(a+1)}{a^2(a+1)}=\frac{-4a(a+1)}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{a^2(a+1)}{-2a^3}=\frac{2a+2}{a-1}.$$

Alakítsuk ezt a következő módon: $\dfrac{2a+2}{a-1}=\dfrac{2(a-1)+4}{a-1}=2+\dfrac{4}{a-1}$. Vagyis az $a-1$ lehetséges értékei: $-4;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 4$, amiből a-ra adódik: $-3;\ -1;\ 0;\ 2;\ 3;\ 5$.

A kikötéseket figyelembe véve az a értékei: $-3;\ 2;\ 3;\ 5$.

3. Számoljuk ki a, b és c pontos értékét:

$$a=-\frac{\sin 39^\circ+\sin 13^\circ}{\sin 26^\circ\cdot\cos 13^\circ}=\frac{2\sin\frac{39^\circ+13^\circ}{2}\cdot\cos\frac{39^\circ-13^\circ}{2}}{\sin 26^\circ\cdot\cos 13^\circ}==-\frac{2\sin 26^\circ\cdot\cos 13^\circ}{\sin 26^\circ\cdot\cos 13^\circ}=-2.b=\sqrt{10^{2+\lg 25}}=\sqrt{10^{\lg 100+\lg 25}}=\sqrt{10^{\lg 2500}}=\sqrt{}$$

A három pont: $A(1;-2)$, $B(3;50)$, $C(4;76)$. Így $\overrightarrow{AB}(2;52)$, $\overrightarrow{BC}(1;26)$, vagyis $\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{BC}$. Ez azt jelenti, hogy A, B, C egy egyenesen vannak.

4. Az I. eset: x Ft befektetés esetén egy év múlva a követelés $1{,}2x$ Ft. Vegyük figyelembe az infláció mértékét is, ezért az összeg értéke $\dfrac{1{,}2x}{1{,}15}\approx 1{,}0435x$ Ft lesz.

A II. eset: x Ft befektetés esetén egy év múlva a követelés $1,12x$ Ft. Most is vegyük figyelembe az infláció mértékét, így az összeg értéke $\dfrac{1.12x}{1,07}\approx 1,0467x$ Ft lesz.

Vagyis a II. változat a jobb a takarékoskodni szándékozónak.

5. Legyen az első tag a, a differencia pedig d, ekkor

$$a^2+2(a+d)^2+3(a+2d)^2+4(a+3d)^2=10a^2+40ad+50d^2=(a+5d)^2+(3a+5d)^2.$$

6. A körök átmennek a megfelelő magasságtalppontokon a Thalesz tétel szerint. A két kör közös húrja AA', ahol A' magasságtalppont. Ha M a magasságpont, akkor a húr szeleteire vonatkozó tétel alapján: $AM\cdot MA'=DM\cdot ME$ és $AM\cdot MA'=FM\cdot MG$. Ebből következik, hogy $DM\cdot ME=FM\cdot MG$, vagyis a D, E, F, G pontok egy körön vannak.

7. A három oldal ismeretében az ABC háromszög területe kiszámítható, például így:

$$t_{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{27(27-20)(27-13)(27-21)}=\sqrt{15\,876}=126\ \text{cm}^2.$$

Pitagorasz tételét alkalmazva: $A'B'=\sqrt{21^2+(25-5)^2}=29$ cm, $B'C'=\sqrt{20^2+(25-4)^2}=29$ cm, $C'A'=\sqrt{13^2+(5-4)^2}=\sqrt{170}$ cm.

Az $A'B'C'$ háromszög egyenlő szárú, alaphoz tartozó magassága is Pitagorasz tételével számolható ki: $m_{b'}=\sqrt{29^2-\left(\dfrac{\sqrt{170}}{2}\right)^2}=\sqrt{798,5}$ cm.

Így $t_{A'B'C'}=\dfrac{\sqrt{170}\cdot\sqrt{798,5}}{2}=\dfrac{\sqrt{135\,745}}{2}$ cm^2.

Ha a szóban forgó két sík hajlásszöge α, akkor $t_{ABC}=t_{A'B'C'}\cdot\cos\alpha$, hiszen az $A'B'C'$ háromszög merőleges vetülete az alaplap síkjára az ABC háromszög. Vagyis $\cos\alpha\approx 0,6840$, amiből $\alpha\approx 46{,}8^\circ$.

8. Mivel $f(x)=2x^6-3x^4+x^2=x^2(x^2-12x^2-1)$, azért

$$f(\sin\alpha)+f(\cos\alpha)=-\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)(2\sin^2\alpha-1)-\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)(2\cos^2\alpha-1)=$$
$$=-\sin^2\alpha\cos^2\alpha(2\sin^2\alpha-1)-\cos^2\alpha\sin^2\alpha(2\cos^2\alpha-1)=$$
$$=-\sin^2\alpha\cos^2\alpha(2\sin^2\alpha-1+2\cos^2\alpha-1)=-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1)=0,$$

ami igaz, mert $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ minden α esetén.

Számadó László