1. *Legyen az ABC hegyesszögű háromszög körülírt körének középpontja O. Legyen P az A-ból induló magasságvonal talppontja a BC oldalon.*

Tegyük fel, hogy $BCA\sphericalangle \geq ABC\sphericalangle + 30^\circ$.

Bizonyítsuk be, hogy $CAB\sphericalangle + COP\sphericalangle < 90^\circ$.

Megoldás. Legyen F a BC oldal felezőpontja. Az $FOC\sphericalangle$ éppen a $CAB\sphericalangle = \alpha$-hoz tartozó középponti szög fele, így $FOC\sphericalangle = \alpha$. Innen $OCP\sphericalangle = OCB\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, tehát azt kell bizonyítani, hogy $POC\sphericalangle < OCP\sphericalangle$, ami ekvivalens $CP < OP$-vel (*1. ábra*).

Legyen A' az A tükörképe a BC felezőmerőlegesére; ekkor A' is a körülírt körön van, és $A'CB\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. A feltétel szerint tehát $A'CA\sphericalangle = ACB\sphericalangle - A'CB\sphericalangle \geq 30^\circ$, és így AA', az ACA' szög szárai által a körből kimetszett húr hossza legalább r, a körülírt kör sugara (*2. ábra*). Így $FP = \dfrac{AA'}{2} \geq \dfrac{r}{2}$.

Mivel az ABC háromszög hegyesszögű, a körülírt kör BC húrja kisebb az átmérőnél, így CF, a húr fele, kisebb, mint r.

Innen $CP = CF - FP < r - \dfrac{r}{2} = \dfrac{r}{2} \leq FP$, a CP szakasz tehát az OP vetületénél, az FP szakasznál is kisebb.

Horváth Illés (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

2. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

minden a, b, c pozitív valós számra.

Megoldás. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$.

1. eset: $a + b \leq 8c$. Ekkor $a^2 + 8bc \leq b^2 + 8ca$, hiszen ebből ekvivalens lépésekkel $0 \leq b^2 - a^2 + 8ac - 8bc$, $0 \leq (a-b)(8c-a-b)$-t kapjuk, ami nyilvánvalóan igaz. Hasonló meggondolásokból, felhasználva a $b + c \leq 8a$ összefüggést, $b^2 + 8ca \leq c^2 + 8ab$ is igaz, tehát a, b, c azonosan rendezett a $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+8bc}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{b^2+8ca}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}$ számokkal, így a Csebisev-egyenlőtlenségből:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq$$
$$\geq \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}\right).$$

Felhasználva a harmonikus és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}\right) =$$
$$= \frac{1}{\frac{3}{\frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}}} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{(a^2+8bc)+(b^2+8ca)+(c^2+8ab)}{3}}}.$$

Elég tehát belátni, hogy

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+8ab+8bc+8ca}{3}}} \geq 1.$$

Ezt rendezve $\sqrt{3}(a+b+c) \geq \sqrt{a^2+b^2+c^2+8ab+8bc+8ca}, 3(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) \geq a^2+b^2+c^2+8ab+8bc+8ca, 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0, (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0, aminyilvnval.$

2. eset: $8c < a + b$. Ekkor

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} > \frac{a}{\sqrt{a^2+b(a+b)}} > \frac{a}{\sqrt{(a+b)^2}} = \frac{a}{a+b}.$$

Hasonlóan $\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} > \dfrac{b}{a+b}$, tehát

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} > \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.$$

Ezzel az állítást beláttuk.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 10. o.t.)

3. *Egy matematikaversenyen 21 lány és 21 fiú vett részt.*

(1)Mindegyik versenyző legfeljebb hat feladatot oldott meg.

(2)Mindegyik fiúhoz és mindegyik lányhoz van legalább egy olyan feladat, amelyet mindketten megoldottak.

Bizonyítsuk be, hogy van olyan feladat, amelyet legalább három lány és legalább három fiú megoldott.

Megoldás. Készítsünk egy 21×21-es táblázatot, amelynek oszlopai jelentsék az egyes fiúkat, míg a sorok a résztvevő lányokat. A táblázat minden egyes mezőjébe írjuk be annak a feladatnak a sorszámát, amelyet mind az oszlophoz tartozó fiú, mind a sorhoz tartozó lány megoldott.

(2) szerint ilyen feladat mindig létezik. (Ha több is van, akkor elég az egyik ilyen feladat sorszámát beírni.) Az *ábrán* látható 5-ös szám például azt jelenti, hogy az 5. feladatot a 2. számú fiú és a 3. számú lány is megoldotta.

Ezek után vizsgáljuk az egyes oszlopokat. Fessük be kékre azokat a mezőket, amelyeken olyan szám áll, amelyik az adott oszlopban legalább háromszor előfordul.

Mivel az (1) feltétel szerint minden oszlopban legfeljebb hatféle szám szerepelhet, azért:
ha egy adott oszlopban

–egyféle számot festettünk be, akkor a többi maximum $(6-1)\cdot 2 = 10$ mezőt fed le, tehát legalább 11 kék mezőnk van;

–kétféle számot festettünk be, akkor a be nem festettek száma maximum $(6-2)\cdot 2 = 8$, azaz legalább 13 kék mező van;

–háromféle kék szám esetén minimum 15 kék mező van;

–4, 5, 6-féle kék szám esetén is legalább $4\cdot 3$, $5\cdot 3$, $6\cdot 3$, azaz 12, 15 és 18 mezőt festettünk be.

Összefoglalva: láthatjuk, hogy minden oszlopban legalább 11 kék mező van, ez pedig 21 oszlop esetén már több, mint a mezők fele $\left(21\cdot 11 > \frac{21^2}{2} + 0{,}5\right)$.

Most vizsgáljuk a sorokat, és fessük pirosra egy adott soron belül azokat a mezőket, amelyeken szereplő számok legalább háromszor fordulnak elő az adott sorban.

Ekkor ugyanúgy belátható, hogy a mezők több, mint fele piros. A skatulya-elv miatt lesz tehát olyan mező, amelyik kék is és piros is, és ez azt jelenti, hogy az ezen mezőkhöz tartozó feladatot legalább három lány (mert a mező kék) és legalább 3 fiú (mert a mező piros) megoldotta.

Vörös László (Győr, Révai M. Gimn., 12. o.t.)

4. *Legyen n egy 1-nél nagyobb páratlan egész, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pedig adott egészek. Az $1, 2, \ldots, n$ számok mind az $n!$ darab $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ permutációjára legyen*

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan b és c permutáció, amelyekre $b \neq c$, és $n!$ osztója $(S(b)-S(c))$-nek.

Megoldás. [1]A megoldás során a feladat eredeti szövegétől eltérően a permutációkat nagybetűkkel jelöljük. Legyen az $n!$ permutáció $A_1, A_2, \ldots, A_{n!}$. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis $n! \nmid S(A_i) - S(A_j)$, ahol $i \neq j$. Mivel $n!$ permutáció van, és $n!$-féle maradék $n!$-sal osztva, ez csak úgy lehetséges, hogy minden maradék pontosan egyszer fordul elő.

Így egyrészt

$$\sum_{i=1}^{n!} S(A_i) \equiv 1 + \cdots + n! \equiv \left(\frac{n!+1}{2}\right) n! \not\equiv 0 \pmod{n!},$$

mivel $\frac{n!+1}{2}$ nem egész, hiszen $n!+1$ páratlan.

Másfelől az $1, 2, \ldots, n$ számok mindegyike $(n-1)!$ permutációban szerepel adott k_i szorzóval, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n!} S(A_i) = (n-1)! \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i (1+2+\cdots+n) = (n-1)! \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot n \cdot \sum_{i=1}^{n!} k_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n!} k_i \cdot n! \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right) \equiv 0 \pmod{n!},$$

hiszen $\frac{n+1}{2}$ egész.

Ellentmondásra jutottunk, hiszen a tagokat kétféle módon összeadva eltérő maradékokat kaptunk $n!$-sal osztva, vagyis a feltevésünk nem teljesül, tehát az állítás igaz.

Kovács Erika Renáta (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

5. *Az ABC háromszögben legyen AP a $BAC\sphericalangle$ szögfelezője, ahol P a BC oldalon van, BQ pedig az $ABC\sphericalangle$ szögfelezője, ahol Q a CA oldalon van. Tudjuk, hogy $BAC\sphericalangle = 60^\circ$ és hogy $AB + BP = AQ + QB$.*

[1] 1

Mik az ABC háromszög szögeinek lehetséges értékei?

Megoldás. Legyen az M pont az AB szakasz B-n túli meghosszabbításának az a pontja, amelyre $BM = BP$. Hasonlóan legyen N az AQ szakasz Q-n túli meghosszabbításának az a pontja, amelyre $BQ = QN$. A BQC szög felezője messe BC-t S-ben.

Legyen $BPM\sphericalangle = \varphi$, ekkor $BM = BP$ miatt $BMP\sphericalangle = \varphi$ és $PBA\sphericalangle = 2\varphi$. Tehát $QBC\sphericalangle = \varphi$. A QBS és a QNS háromszögek egybevágóak, mert $QB = QN$, a QS oldaluk közös, továbbá $SQB\sphericalangle = NQS\sphericalangle$. Tehát $QBS\sphericalangle = QNS\sphericalangle = \varphi$. Így az AMP háromszög és az ANP háromszög is egybevágó, mert az

$$AM = AB + BM = AB + BP = AQ + BQ = AQ + QN = AN$$

oldalak egyenlőek, közös az AP oldaluk, és egyenlő az A-nál levő szögük. Ezért $AMP\sphericalangle = ANP\sphericalangle = \varphi$.

Tehát $QNP\sphericalangle = QNS\sphericalangle = \varphi$. Ekkor két eset lehetséges: $P = S$ vagy $P \neq S$, és így P, S, N egy egyenesen vannak.

Ha $P = S$, akkor a BQP és a QPN háromszögek, valamint az APM és APN háromszögek egybevágóságából kapjuk, hogy $BP = PN = PM$, azaz $BP = PM = BM$, azaz az ABC háromszög B-nél lévő szöge $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, ami nem lehetséges, mert így $ABC\sphericalangle + BAC\sphericalangle = 180^\circ$.

Tehát P, S, N egy egyenesen vannak, azaz $N = C$. Így $ABC\sphericalangle = ANS\sphericalangle = \varphi$, azaz $180^\circ - BAC\sphericalangle + ABC\sphericalangle + ACB\sphericalangle = 60^\circ + 2\varphi + \varphi$. Innen $\varphi = 40^\circ$ és $2\varphi = 80^\circ$. Tehát az egyetlen lehetséges megoldás, hogy $ABC\sphericalangle = 80^\circ$, $ACB\sphericalangle = 40^\circ$ és $BAC\sphericalangle = 60^\circ$.

Ez a megoldás jó is, mert a $QBC\sphericalangle = QCB\sphericalangle$ összefüggésből kapjuk, hogy $BQ = QC$. Továbbá az APM és APC háromszög egybevágó, mert két szögük, az A-nál, valamint az M és C-nél levő szögek megegyeznek, és van egy közös oldaluk: AP. Tehát $AB + BP = AB + BM = AM = AC = AQ + QC = AQ + QB$.

Tehát az egyetlen megoldás a 60°, 80°, 40°-os háromszög.

Csikvári Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

6. *Legyenek a, b, c, d egészek, amelyekre $a > b > c > d > 0$. Tegyük fel, hogy*

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Bizonyítsuk be, hogy $ab + cd$ nem prímszám.

Megoldás. Kibontva $ac + bd$ szorzatalakját, majd rendezve az egyenlőséget a következőhöz jutunk:

$$a^2 + b^2 - ac = b^2 + d^2 + bd. \tag{1}$$

(1)-ben pozitív egészek egyenlősége áll, és nyilván

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos 60^\circ = b^2 + d^2 - 2bd\cos 120^\circ.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy létezik olyan e hosszúságú szakasz, hogy az a, c, e oldalú háromszögben e-vel szemben 60°-os, a b, d, e oldalú háromszögben pedig e-vel szemben 120°-os szög van. Így az ábrán látható a, c, b, d oldalú, e átlójú négyszög húrnégyszög (két szemközti szögének az összege 180°). Használhatjuk tehát Ptolemaiosz tételét: ha f a másik átló hossza, akkor

$$ab + cd = ef. \tag{2}$$

Most számoljuk ki f hosszát. Két koszinusztételt felírva:

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi = f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\varphi.$$

Ebből $\cos\varphi$-re a következő érték adódik: $\cos\varphi = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$, amit visszahelyettesítve:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{a^2bc + bcd^2 + ab^2d + ac^2d}{ad + bc} == \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}. \tag{3}$$

Ezt a kifejezést írjuk be (2) négyzetébe:

$$(ab + cd)^2 = e^2 f^2 = e^2 \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Osztva $(ab + cd)$-vel:

$$ab + cd = \frac{(ac + bd) \cdot e^2}{ad + bc}. \tag{4}$$

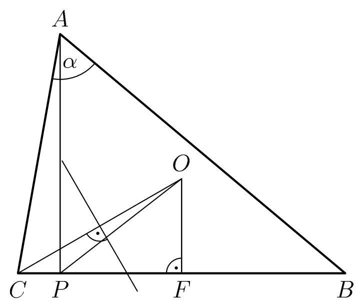
Legyen $P = ab + cd$, $Q = ac + bd$, $R = ad + bc$ és $E = e^2$. Ekkor P, Q, R, E pozitív egészek, és (4) szerint

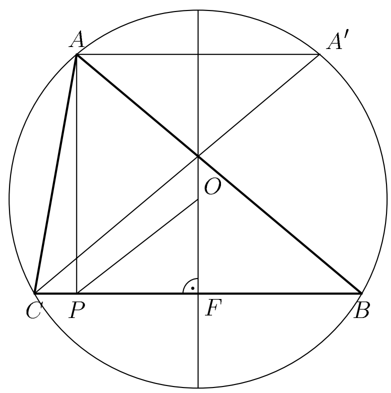
$$PR = EQ. \tag{5}$$

Mivel $P-Q=(a-d)(b-c)$ és $Q-R=(a-b)(c-d)$, azért $a>b>c>d$ miatt $P>Q>R>0$, és így (5)-ből $E>R>0$.

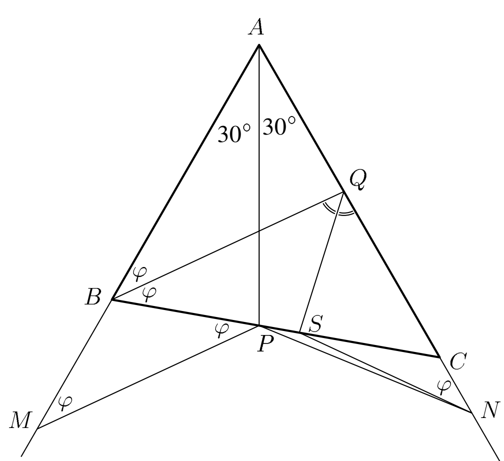
Ha P prím, akkor $P \mid EQ$ miatt $P \mid E$ vagy $P \mid Q$, és így $R=\dfrac{E}{P}\cdot Q=E\cdot\dfrac{Q}{P}$ alapján $Q \mid R$ vagy $E \mid R$. Mivel láttuk, hogy mind Q, mind pedig E nagyobb R-nél, egyik oszthatóság sem állhat fenn, P tehát valóban nem lehet prímszám.

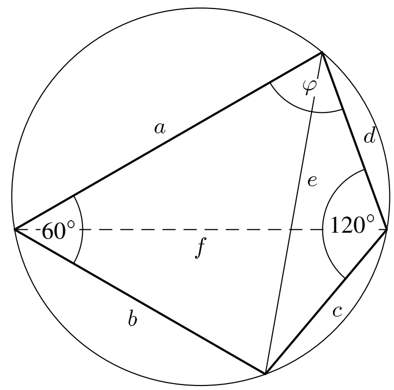
Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)





	1. fiú	2. fiú	3. fiú	…	21. fiú	
1. lány						
2. lány						
3. lány		5				
⋮						
21. lány						





a
φ
d
e
$60°$
f
$120°$
b
c