$$\sqrt[n]{2}-1<\frac{1}{n+1}. \tag{1}$$

I. megoldás. Az $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\ldots+a+1)$ összefüggést az $a=\sqrt[n]{2}$ számára alkalmazva (1)-ből a vele ekvivalens

$$a^{n-l}+a^{n-2}+\ldots+a+1>n+1 \tag{2}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ezt fogjuk igazolni. Hagyjuk el mindkét oldalról az 1-et, és alkossunk párokat a bal oldalon álló számokból úgy, hogy az első és utolsó, második és utolsó előtti, általában a k-adik és $(n-k)$-adik kerüljön egy párba. Megmutatjuk, hogy a számok összege minden párban legalább $2\sqrt{2}$, azaz

$$a^{n-k}+a^k\geq 2\sqrt{2}. \tag{3}$$

(Ha n páros, és $k=n/2$, a középső „pár” csak egy számból áll, de az épp a $\sqrt{2}$.) Emiatt (2) bal oldalán legalább $(n-1)\sqrt{2}+1$ áll, és ez $n>3$ mellett valóban nagyobb $(n+1)$-nél. Elég tehát (3)-at belátni. Ez viszont

$$\left(a^{\frac{n}{2}-k}-1\right)^2\geq 0$$

alapján nyilvánvaló (ne feledjük, hogy $a=\sqrt[n]{2}$).

Szabó József (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Mivel $1{,}2^2=1{,}44>\sqrt{2}$, (1) igaz $n=4$ mellett:

$$\sqrt[4]{2}-1<\frac{1}{5}. \tag{4}$$

Ha $n>4$, vegyünk $(n-4)$ egyest, és négy $\sqrt[4]{2}$-t. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt[n]{2}<\frac{n-4+4\sqrt[4]{2}}{n}.$$

Itt a jobb oldal (4) miatt kisebb, mint $1+\frac{4}{5n}$, ami viszont $n>4$ miatt kisebb, mint $1+\frac{1}{n+1}$.

Ivanyos Gábor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

III. megoldás. Azt mutatjuk meg, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n>2, \tag{5}$$

ha $n>3$. A binomiális tétel alapján a bal oldal értéke legalább

$$1+\frac{n}{n+1}+\frac{n(n-1)}{2(n+1)^2}.$$

Mivel itt $n>3$ mellett $n(n-1)>2(n+1)$, ez valóban nagyobb, mint 2.

Czavalinga Péter (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Belátható, hogy az (5) bal oldalán álló sorozat n-ben monoton nő, és konvergens. Határértéke egy nevezetes szám, amit e-vel szokás jelölni, és értéke néhány tizedesre 2,718 281 829 ...

Szabó Sándor (Budapest, Zrínyi I. Gimn., III. o. t.)