

Az idei matematikaversenyt a szegedi tanárképző főiskola 2001. április 9. és 11. között rendezte meg. Hat város főiskolájából 5-5 hallgató mérte össze tudását. A dolgozatokat április 10-én délelőtt írták. A feladatokat a főiskolák oktatóinak javaslatai alapján állította össze a verseny elnöke, *Urbán János*. Minden város javaslataiból választott egyet-egyet, majd – ahogy korábban is – a saját feladatával megtoldva állt össze az alábbi hét feladat.

★

1. Egy kocka három, páronként kitérő élén vegyünk föl egy-egy pontot. Az így kapott háromszögek közül hány olyan van, amelynek súlypontja a kocka középpontja?

2. Jelölje  $a_n$  a Pascal-háromszög  $n$ -edik sorában álló elemek reciprokainak összegét ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Konvergense az  $(a_n)$  sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

3. A valós számok halmazán értelmezett  $f$  függvényre fennáll, hogy ha  $x \in \mathbf{R}$ , akkor

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x).$$

Igazoljuk, hogy  $f$  periodikus függvény.

4. Az  $a, b, c$  pozitív valós számok összege 1. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} < 1.$$

5. Legyenek adottak az  $a, b, c$  pozitív valós számok és az  $n > 1$  egész szám úgy, hogy

$$a^n + b^n = c^n$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ha  $1 \leq k < n$  egész, akkor az  $a^k, b^k, c^k$  hosszúságú oldalakkal szerkeszthető háromszög! Mely  $k$ -ra lesz az így kapott háromszög derékszögű, hegyesszögű és tompaszögű?

6. Egységélű kockát merőlegesen vetítünk egy síkra. Határozzuk meg a vetület területének maximumát!

7. Az  $ABC$  háromszöget ( $AC \neq BC$ ) úgy helyezzük el a derékszögű koordináta-rendszerben, hogy az  $AB$  oldal felezőpontja legyen az origó és a  $C$  csúcshoz tartozó (belső) szögfelező egyenes párhuzamos legyen valamelyik tengellyel. Igazoljuk, hogy az a hiperbola, amely illeszkedik az  $A$  csúcsra és asszimptotái a tengelyek, tartalmazza a  $B$  és  $C$  csücsöt is!

★

A díjkiosztó ünnepségre másnap, április 11-én került sor. A 30 résztvevő diák közül 16-an kaptak értékes díjakat. *Szendrei János* köszönte meg a diákok és az oktatók lelkes részvételét. Jövőre Szombathelyen találkozunk.

**Fried Katalin**